

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ رـ اـ خـ

Math

@Flow_KonKour



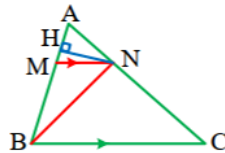
@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

اولاً از رابطه $MN \parallel BC$ طبق قضیه تالس، داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{\gamma}{\gamma} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{\gamma}{\gamma} \quad (*)$$



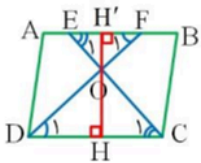
ثالثاً به کمک رابطه مساحت مثلث، داریم:

$$\frac{S_{\triangle MNB}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{\frac{1}{2} \times NH \times MB}{\frac{1}{2} \times NH \times AM} = \frac{MB}{AM} = \frac{AB - AM}{AM} = \frac{AB}{AM} - \frac{AM}{AM} \xrightarrow{(*)} \frac{S_{\triangle MNB}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{\gamma}{\gamma} - 1 = \frac{5}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MNB}} = \frac{2}{5} = 0.4 = 40\% \text{ درصد}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

از آنجایی که $AB \parallel CD$ است، طبق قضیه خطوط موازی و مورب، داریم: $\hat{F}_1 = \hat{D}_1$, $\hat{E}_1 = \hat{C}_1$



و در نتیجه دو مثلث OEF و OCD به حالت دو زاویه با هم متشابهند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با:

$$\frac{S_{\triangle OEF}}{S_{\triangle OCD}} = k^2 \Rightarrow \frac{5}{45} = k^2 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

از طرفی می‌دانیم در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌های متناظر با نسبت تشابه برابر است.

$$\frac{OH'}{OH} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{OH' + OH}{OH} = \frac{1 + 3}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{HH'}{OH} = \frac{4}{3} \quad (*)$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{OCD}} = \frac{HH' \times CD}{\frac{1}{2} \times OH \times CD} = 2 \frac{HH'}{OH} \xrightarrow{(*)} 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{45} = \frac{8}{3} \Rightarrow S_{ABCD} = 45 \times \frac{8}{3} = 120$$

بنابراین، خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$S_{\text{مربع}} = 16 \Rightarrow AB = AD = 4$$

$$\tan 60^\circ = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

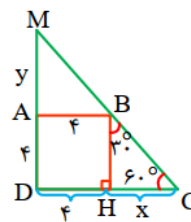
$$\text{تالس: } \frac{y}{y+4} = \frac{4}{4+\frac{4\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \frac{y}{y+4} = \frac{3}{3+\sqrt{3}} \Rightarrow y\sqrt{3} = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}$$

$$S_{\text{دو زنگه}} = \frac{4+4+x}{2} \times 4 = 16 + 2x = 16 + \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{S_{\triangle AMB}}{S_{\text{دو زنگه}}} = \frac{8\sqrt{3}}{16 + \frac{8\sqrt{3}}{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{48 + 8\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6 + \sqrt{3}}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



۴

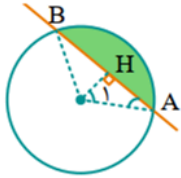
اولاً با توجه به شکل، واضح است که:

$$\left. \begin{aligned} \frac{AD}{AC} = \frac{15}{10+20} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \\ \frac{AE}{AB} = \frac{10}{15+5} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \xrightarrow{\text{ضریض}} \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} S_{\triangle ADE} = x \\ S_{\triangle ABC} = 4x \end{cases}$$

تفضیل در مخرج

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE}} = \frac{x}{4x - x} = \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DECB}} = \frac{1}{3}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



$$OH = \frac{|3+8-6|}{\sqrt{9+16}} = 1$$

مرکز دایره $O(1,2)$ و شعاع آن ۲ است.
 OH فاصله مرکز دایره از خط $3x + 4y - 6 = 0$ می باشد.

۵

$$\sin \hat{A} = \frac{OH}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ \Rightarrow \hat{AOB} = 120^\circ$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{1}{2} \pi \times 4 = 2\pi$$

مساحت قطاع $\hat{AOB}$ ، $\frac{1}{3}$ مساحت دایره است.

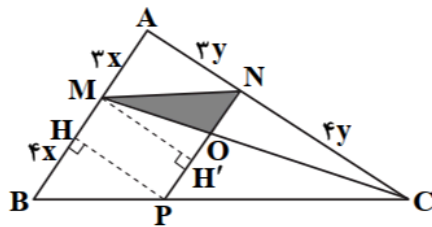
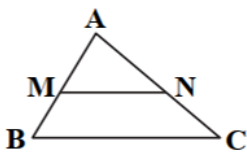
$$S_2 = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

مساحت مثلث $\hat{AOB}$ برابر است با:

$$S_{\text{رنجی}} = S_1 - S_2 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



نکته: در شکل روبه‌رو، اگر $MN \parallel BC$ ، آنگاه: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC}$

از $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{4}$ نتیجه می‌شود $MA = 3x$ و $MB = 4x$. طبق فرض $MNPB$

$MN \parallel BC$

متوازی‌الاضلاع است، پس:

بنابراین با توجه به نکته داریم $\frac{NA}{NC} = \frac{MA}{MB} = \frac{3}{4}$ ؛ یعنی: $NC = 4y$ و $NA = 3y$

اگر قاعده مثلث و قاعده متوازی‌الاضلاع را به ترتیب MB و ON در نظر بگیریم، ارتفاع آن‌ها برابر است ($MH' = PH = h$) چون MB و ON با هم موازی‌اند. اکنون داریم:

$$\triangle AMC : ON \parallel AM \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{ON}{AM} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow \frac{ON}{AM} = \frac{4y}{7y} = \frac{4}{7}$$

از طرفی چون $AM = \frac{3}{4} MB$ ، پس:

$$\frac{ON}{\frac{3}{4} MB} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{S_{OMN}}{S_{MNPB}} = \frac{\frac{ON \times h}{2}}{\frac{MB \times h}{2}} = \frac{ON}{2MB} = \frac{3}{2 \times 7} = \frac{3}{14}$$

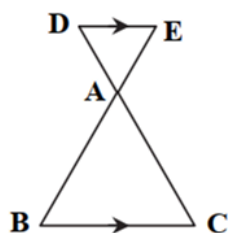
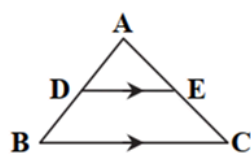
بنابراین $\frac{ON}{MB} = \frac{3}{7}$. پس نسبت مساحت‌ها برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶

۷

نکته (قضیه اساسی تشابه): اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر (یا امتداد آن‌ها) را قطع کند، در این صورت مثلث کوچک پدیدآمده با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

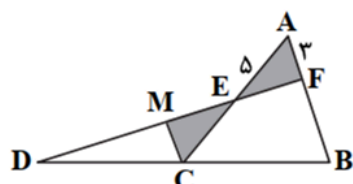


$$DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

از C خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا DE را در M قطع کند. طبق قضیه اساسی تشابه داریم:

$$CM \parallel AF \Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle ECM$$

حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:



$$\frac{AF}{CM} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{3}{CM} = \frac{5}{EC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{CM}{EC} \quad (I)$$

از طرفی $BF \parallel CM$ است، پس طبق قضیه اساسی تشابه داریم:

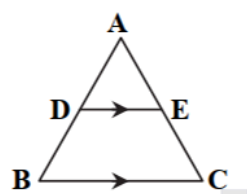
$$\triangle DMC \sim \triangle DFB \Rightarrow \frac{CM}{BF} = \frac{DC}{DB} \xrightarrow{BF=EC} \frac{CM}{EC} = \frac{DC}{DB} \xrightarrow{(I)} \frac{DC}{DB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{5}{3}$$

پس نسبت $\frac{DB}{DC}$ برابر $\frac{5}{3}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸

نکته (تعمیم قضیه تالس): اگر در مثلث ABC، $DE \parallel BC$ ، آنگاه:



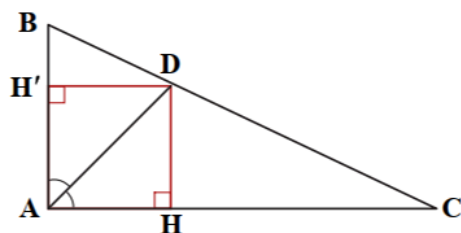
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

به کمک فیثاغورس، وتر را پیدا می‌کنیم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow BC = 13$$

مثلث ABC را رسم می‌کنیم. نیمساز زاویه A، ضلع BC را در D قطع می‌کند.

از D به هر دو ضلع قائم، عمود رسم می‌کنیم:



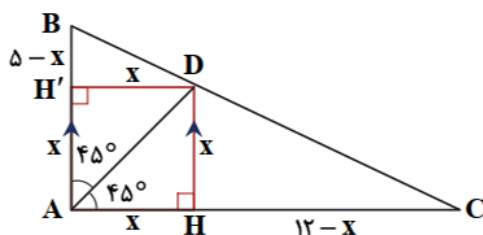
در چهارضلعی $AH'DH$ ، زوایا قائمه‌اند و قطر نیمساز است، پس این چهارضلعی مربع است. اندازه همه اضلاع این مربع را X در نظر می‌گیریم و در مثلث ABC، تعمیم قضیه تالس را می‌نویسیم:

$$HD \parallel AB \Rightarrow \frac{HC}{AC} = \frac{DH}{AB} \Rightarrow \frac{12-X}{12} = \frac{X}{5} \Rightarrow 12X = 60 - 5X$$

$$\Rightarrow X = \frac{60}{17}$$

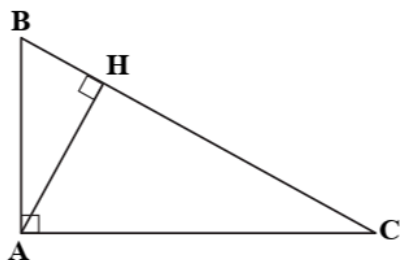
پس:

$$HC = 12 - X = 12 - \frac{60}{17} = \frac{144}{17}$$



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه ABC با رسم ارتفاع وارد بر وتر، روابط زیر را داریم:



$$۱) AH = \frac{AB \times AC}{BC}$$

$$۲) AH^2 = BH \times HC$$

$$۳) AB^2 = BH \times BC$$

$$۴) AC^2 = CH \times CB$$

در مثلث ABC، داریم:

$$\tan \hat{C} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{3}x \\ AC = \sqrt{5}x \end{cases}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow ۸^2 = ۳x^2 + ۵x^2 \Rightarrow x^2 = ۸ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۲}$$

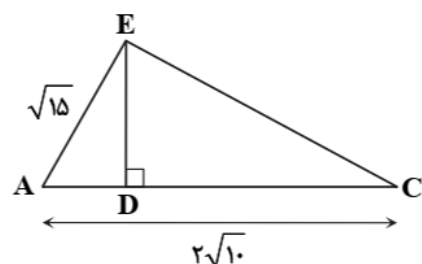
پس:

$$\begin{cases} AB = \sqrt{3} \times ۲\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۶} \\ AC = \sqrt{5} \times ۲\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۱۰} \end{cases}$$

AE همان ارتفاع وارد بر وتر است، پس:

$$AE = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{۲\sqrt{۶} \times ۲\sqrt{۱۰}}{۸} = \frac{\sqrt{۶۰}}{۲} = \sqrt{۱۵}$$

در مثلث AEC، داریم:



$$AD \times AC = AE^2$$

$$AD \times ۲\sqrt{۱۰} = ۱۵ \Rightarrow AD = \frac{۱۵}{۲\sqrt{۱۰}} = \frac{۳\sqrt{۱۰}}{۴}$$

با توجه به موازی بودن AB و DE در مثلث ABC، تعمیم قضیه تالس را می‌نویسیم:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۴}}{۲\sqrt{۱۰}} = \frac{BE}{۸} \Rightarrow \frac{۳}{۸} = \frac{BE}{۸} \Rightarrow BE = ۳$$

در نتیجه:

$$EC = BC - BE = ۸ - ۳ = ۵$$

بنابراین:

$$\frac{AD}{EC} = \frac{\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۴}}{۵} = \frac{۳}{۲۰}\sqrt{۱۰} = ۰/۱۵\sqrt{۱۰}$$

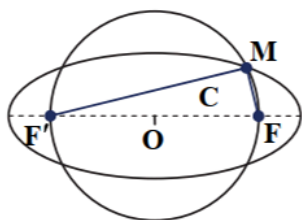
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

10

نکته: مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

نکته: اگر در یک بیضی، اندازه نیم‌قطر بزرگ را a ، اندازه نیم‌قطر کوچک را b و نصف فاصله کانونی بیضی را c بنامیم، آنگاه: $a^2 = b^2 + c^2$ با توجه به شکل، نقطه M روی دایره است و زاویه $\widehat{F'MF}$ ، روبه‌روی قطر FF' است.

پس $\widehat{F'MF} = 90^\circ$ و مثلث MFF' در رأس M قائم‌الزاویه است. بنابراین:



$$S_{\Delta MF MF'} = \frac{1}{2} \times MF \times MF' \quad (1)$$

اکنون با فرض $\text{MF} = x$ ، داریم:

$$\mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{MF} + \mathbf{MF}' = \gamma \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{MF}' = \gamma \mathbf{a} - \mathbf{x} \quad (2)$$

$$\mathbf{MFF}' : (\mathbf{MF})^{\Upsilon} + (\mathbf{MF}')^{\Upsilon} = (\mathbf{FF}')^{\Upsilon} \xrightarrow{\mathbf{FF}' = \Upsilon \mathbf{c}} \mathbf{x}^{\Upsilon} + (\Upsilon \mathbf{a} - \mathbf{x})^{\Upsilon} = (\Upsilon \mathbf{c})^{\Upsilon}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^T + \mathbf{f}\mathbf{a}^T - \mathbf{f}\mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T = \mathbf{f}\mathbf{c}^T \Rightarrow \mathbf{r}\mathbf{x}^T - \mathbf{f}\mathbf{a}\mathbf{x} = \mathbf{f}\mathbf{c}^T - \mathbf{f}\mathbf{a}^T \xrightarrow{\div \mathbf{f}} \frac{1}{\mathbf{f}}\mathbf{x}^T - \mathbf{a}\mathbf{x} = \mathbf{c}^T - \mathbf{a}^T \quad (\text{r})$$

با توجه به رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ و اندازه قطر کوچک بیضی داریم:

$$\mathbf{b}^T = \mathbf{a}^T - \mathbf{c}^T, \quad \mathbf{r}\mathbf{b} = \rho \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{a}^T - \mathbf{c}^T = \mathbf{q} \quad (f)$$

بنابر این:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1), (2) \Rightarrow S_{\text{MFF}'}^{\Delta} = \frac{1}{r}(x)(ra - x) = ax - \frac{1}{r}x^r \\ (r), (r) \Rightarrow \frac{1}{r}x^r - ax = -q \Rightarrow ax - \frac{1}{r}x^r = q \end{array} \right. \Rightarrow S_{\text{MFF}'}^{\Delta} = q$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ با شرط $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ با هم موازی هستند.

دو خط $3x + 4y = 4$ و $6x + 8y = 8$ موازی‌اند، زیرا:

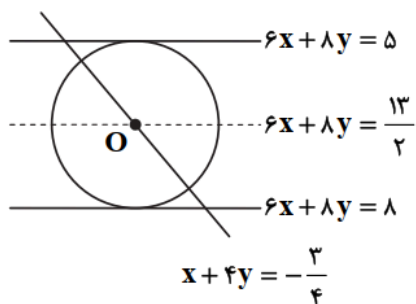
$$6x + 8y = 8 \Rightarrow 3x + 4y = 4$$

$$3x + 4y = 4 \xrightarrow{\times 2} 6x + 8y = 8$$

خط وسط دو خط موازی فوق، خطی است که از مرکز دایره می‌گذرد.

$$6x + 8y = \frac{8+8}{2} \Rightarrow 6x + 8y = 8$$

نقطه برخورد دو خط $6x + 8y = 8$ و $3x + 4y = 4$ مرکز دایره است.



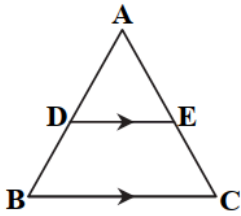
$$\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 6x + 8y = 8 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -3x - 4y = -8 \\ 6x + 8y = 8 \end{cases} \Rightarrow 4x = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{aligned} 2 + 4y &= -\frac{3}{4} \\ \Rightarrow 4y &= -\frac{3}{4} - 2 = -\frac{11}{4} \\ \Rightarrow y &= -\frac{11}{16} \end{aligned}$$

$$\text{مرکز دایره } O(2, -\frac{11}{16})$$

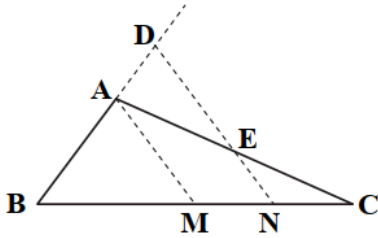
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته (تعمیم قضیه تالس): اگر در مثلث ABC ، $DE \parallel BC$ ، آنگاه:



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



$$\triangle AMC : EN \parallel AM \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{MC}{MN} = \frac{AC}{AE}$$

$$\xrightarrow{AC=9, MC=MB} \frac{MB}{MN} = \frac{9}{AE} \quad (1)$$

$$\triangle BDN : AM \parallel DN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MB}{MN} = \frac{AB}{AD}$$

$$\xrightarrow{AB=6} \frac{MB}{MN} = \frac{6}{AD} \quad (2)$$

سمت چپ تساوی‌های (۱) و (۲) با هم برابرند، پس سمت راست آن‌ها نیز با هم برابر است:

$$\frac{6}{AD} = \frac{9}{AE} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

نکته: اگر در یک بیضی، اندازه نیم قطر بزرگ را a ، اندازه نیم قطر کوچک را b و نصف فاصله کانونی بیضی را c بنامیم، آنگاه: $a^2 = b^2 + c^2$.

نکته: مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می دهند.

راه حل اول:

ابتدا طول NF را به دست می آوریم:

می دانیم $FF' = 2c$ و N روی بیضی است. بنابراین:

$$NF + NF' = 2a \Rightarrow x + y = 2a \Rightarrow y = 2a - x \quad (*)$$

$$\triangle NFF': x^2 + (FF')^2 = y^2 \Rightarrow x^2 + 4c^2 = y^2 \xrightarrow{(*)} x^2 + 4c^2 = (2a - x)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 4c^2 = 4a^2 - 4ax + x^2 \Rightarrow 4ax = 4a^2 - 4c^2 \Rightarrow x = \frac{a^2 - c^2}{a}$$

$$\Rightarrow NP = 2\left(\frac{a^2 - c^2}{a}\right)$$

چون چهارضلعی $MNPQ$ مربع است و $MN = 2c$ ، پس:

$$2c = 2\left(\frac{a^2 - c^2}{a}\right) \Rightarrow c = \frac{a^2 - c^2}{a} \xrightarrow{+a} \frac{c}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$\xrightarrow{e = \frac{c}{a}} e = 1 - e^2 \Rightarrow e^2 + e - 1 = 0 \Rightarrow e = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{0 < e < 1} e = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

راه حل دوم (برای محاسبه NP):

نکته: وتری که از کانون می گذرد و بر قطر بزرگ عمود است را وتر کانونی می نامیم که طول آن برابر $\frac{2b^2}{a}$ است.

با توجه به نکته بالا:

$$NP = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow NP = 2\left(\frac{a^2 - c^2}{a}\right)$$

و ادامه حل مانند راه حل اول است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴

نکته: در بیضی بین a , b و c رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است.

نکته: مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.
عرض مرکز و کانون یکسان است، پس بیضی افقی است و چون مرکز، وسط کانون‌ها است، کانون دیگر بیضی را می‌یابیم:

$$O(1,3), F(-3,3) \Rightarrow 1 = \frac{-3 + x_{F'}}{2} \Rightarrow x_{F'} = 5 \Rightarrow F'(5,3)$$

نقطه $M(4,4)$ روی بیضی قرار دارد، پس $MF + MF' = 2a$.

$$MF = \sqrt{(4+3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$MF' = \sqrt{(4-5)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow 2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$$

$$OF = c \Rightarrow c = \sqrt{(1+3)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{4^2 + 0} = 4$$

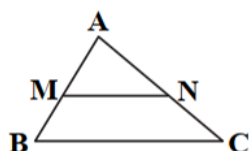
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = (3\sqrt{2})^2 - 4^2 = 18 - 16 = 2$$

$$b = \sqrt{2} \Rightarrow \text{قطر کوچک} = 2b = 2\sqrt{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۵

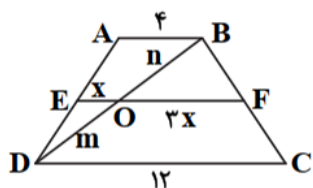
نکته: در شکل روبه‌رو، اگر $MN \parallel BC$ ، آنگاه:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

با استفاده از نکته بالا داریم:



$$\triangle ABD : EO \parallel AB \Rightarrow \frac{DO}{DB} = \frac{EO}{AB} \Rightarrow \frac{m}{m+n} = \frac{x}{4} \quad (1)$$

$$\triangle BCD : OF \parallel CD \Rightarrow \frac{BO}{BD} = \frac{FO}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{m+n} = \frac{3x}{12} \Rightarrow \frac{(m+n)-n}{m+n} = \frac{12-3x}{12} \Rightarrow \frac{m}{m+n} = \frac{12-3x}{12} \quad (2)$$

سمت چپ تساوی‌های (۱) و (۲) با هم برابر است، پس سمت راست آن‌ها هم با هم برابرند؛ یعنی:

$$\frac{x}{4} = \frac{12-3x}{12} \Rightarrow 12x = 4(12-3x) \Rightarrow 12x = 48 - 12x \Rightarrow 24x = 48 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow EO = 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله گسترده یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ است. شعاع این دایره

برابر است با:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

ابتدا وضعیت دو دایره C و C' را نسبت به هم بررسی می‌کنیم.

$$C: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow O(2, 3), r = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 - 4(-3)} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{52 + 12} = \frac{1}{2} \sqrt{64} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$C': x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow O'(1, -1), r' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 - 4(-2)} \Rightarrow r' = \frac{1}{2} \sqrt{8 + 8} = \frac{1}{2} \sqrt{16} = 2$$

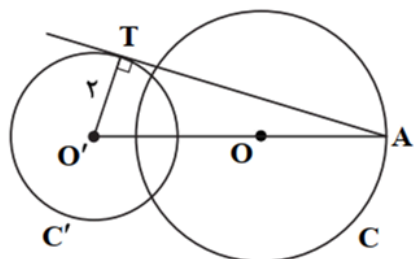
$$OO' = \sqrt{(2-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \Rightarrow 4-2 < \sqrt{17} < 4+2 \Rightarrow r-r' < OO' < r+r'$$

پس دو دایره متقاطع هستند و با توجه به شکل روبه‌رو، بیشترین مقدار طول مماس AT زمانی به‌وجود می‌آید که نقطه A را محل برخورد خط‌المركزین با دایره C در نظر بگیریم.

$$O'A = OO' + OA = \sqrt{17} + 4 \Rightarrow AT^2 + O'T^2 = O'A^2$$

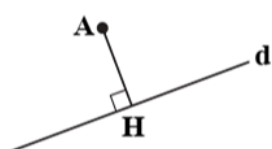
$$\Rightarrow AT^2 + 4 = (\sqrt{17} + 4)^2 = 17 + 16 + 8\sqrt{17}$$

$$\Rightarrow AT^2 = 29 + 8\sqrt{17} \Rightarrow AT = \sqrt{29 + 8\sqrt{17}}$$



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

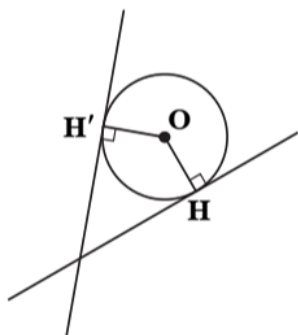


$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ ، معادله دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r در صفحه مختصات است.

مطابق شکل، اگر نقطه $O(\alpha, \beta)$ مرکز دایره موردنظر باشد، داریم:

$$OH = OH' = r$$



از طرفی O روی نیمساز ناحیه اول یعنی خط $y = x$ است. پس $\alpha = \beta$ و نقطه $O(\alpha, \alpha)$ مرکز دایره است.

اکنون فاصله O را از دو خط داده شده به دست می‌آوریم:

$$x + 2y - 6 = 0 \xrightarrow{O(\alpha, \alpha)} OH = \frac{|\alpha + 2\alpha - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|3\alpha - 6|}{\sqrt{5}}$$

$$2x + y = 0 \xrightarrow{O(\alpha, \alpha)} OH' = \frac{|2\alpha + \alpha|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|3\alpha|}{\sqrt{5}}$$

$$OH = OH' = r \Rightarrow |3\alpha - 6| = |3\alpha| \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - 6 = 3\alpha \Rightarrow -6 = 0 \\ 3\alpha - 6 = -3\alpha \Rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

پس $r = OH' = \frac{3}{\sqrt{5}}$ و $O(1, 1)$ هستند و معادله دایره به صورت زیر است:

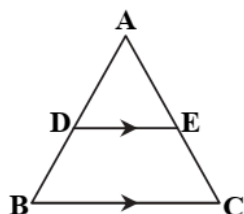
$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = \frac{9}{5} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + \frac{1}{5} = 0$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

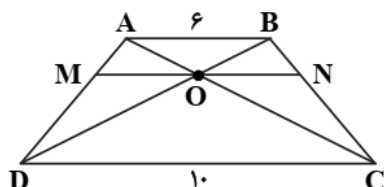
نکته (تعمیم قضیه تالس): اگر در مثلث ABC ، $DE \parallel BC$ ، آنگاه:

۱۸



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

با توجه به موازی بودن MN با قاعده‌ها داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ACD: \frac{MO}{DC} = \frac{AM}{AD} \\ \triangle ABD: \frac{MO}{AB} = \frac{DM}{AD} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \frac{MO}{10} + \frac{MO}{6} = \frac{AM}{AD} + \frac{DM}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{2MO + 5MO}{30} = \frac{AD}{AD} \Rightarrow \frac{7MO}{30} = 1 \Rightarrow MO = \frac{15}{4} = 3.75$$

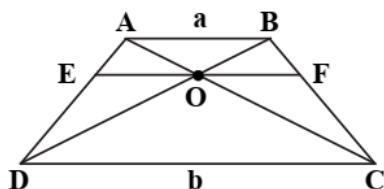
$$\left. \begin{array}{l} \triangle BCD: \frac{NO}{DC} = \frac{BN}{BC} \\ \triangle ABC: \frac{NO}{AB} = \frac{CN}{BC} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \frac{NO}{10} + \frac{NO}{6} = \frac{BN}{BC} + \frac{CN}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{2NO + 5NO}{30} = 1 \Rightarrow NO = \frac{15}{4} = 3.75$$

بنابراین $MN = MO + NO = 7.5$.

روش دوم:

نکته: اگر در دوزنقه $ABCD$ از محل برخورد قطرها خطی موازی قاعده‌ها رسم کنیم. آنگاه:



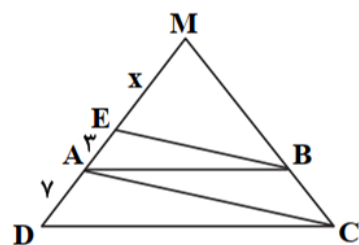
$$EF = \frac{2ab}{a+b}$$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$MN = \frac{2 \times 6 \times 10}{16} = 7.5$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



چون $ABCD$ دوزنقه است، پس $AB \parallel CD$. با فرض $ME = x$ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle MDC: AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow \frac{x+3}{7} = \frac{MB}{BC} \\ \triangle MAC: EB \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ME}{EA} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{MB}{BC} \end{array} \right.$$

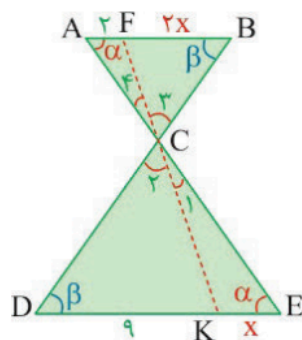
$$\Rightarrow \frac{x+3}{7} = \frac{x}{3} \Rightarrow 3x+9=7x \Rightarrow 4x=9 \Rightarrow x=2.25$$

بنابراین طول MD برابر است با:

$$MD = 2.25 + 3 + 7 = 12.25$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰



مطابق شکل در مثلث‌های AFC و KCE، $\hat{A} = \hat{E}$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ، پس این دو مثلث با هم متشابه‌اند.
همچنین در مثلث‌های FBC و CDK، $\hat{D} = \hat{B}$ و $\hat{C}_2 = \hat{C}_3$ می‌باشد، پس این دو مثلث هم با متشابه‌اند.
در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} \frac{AF}{KE} = \frac{FC}{KC} \\ \frac{FB}{DK} = \frac{FC}{KC} \end{cases} \Rightarrow \frac{AF}{KE} = \frac{FB}{DK} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{2x}{9} \Rightarrow x = 3 \rightarrow KE = 3$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۱

مطابق شکل در مثلث‌های AFE و EDB زاویه‌های $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ و $\hat{E}BD = \hat{A}FE$ است. پس این دو مثلث متشابه‌اند و $\hat{A} = \hat{D} = \alpha$
است. پس:

$$\frac{EF}{BE} = \frac{AF}{BD} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{AF}{6} \Rightarrow AF = 3$$

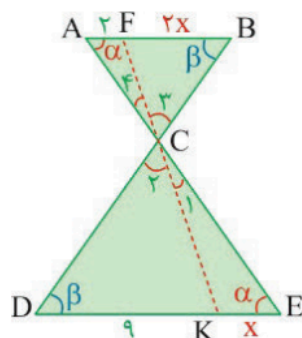
حال دو مثلث ABC و CDF در زاویه $\hat{C}$ مشترک‌اند و دارای زاویه α هستند پس متشابه‌اند:

$$\triangle ABC \sim \triangle CDF: \frac{BC}{CF} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{5} = \frac{8}{6+x} \Rightarrow x^2 + 6x = 40 \Rightarrow x^2 + 6x - 40 = 0 \Rightarrow x = 4 \rightarrow BC = 4$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۲



مطابق شکل در مثلث‌های AFC و KCE، $\hat{A} = \hat{E}$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ، پس این دو مثلث با هم متشابه‌اند.
همچنین در مثلث‌های FBC و CDK، $\hat{D} = \hat{B}$ و $\hat{C}_2 = \hat{C}_3$ می‌باشد، پس این دو مثلث هم با متشابه‌اند.
در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} \frac{AF}{KE} = \frac{FC}{KC} \\ \frac{FB}{DK} = \frac{FC}{KC} \end{cases} \Rightarrow \frac{AF}{KE} = \frac{FB}{DK} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{2x}{9} \Rightarrow x = 3 \rightarrow KE = 3$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۳

مطابق شکل در مثلث‌های AFE و EDB زاویه‌های $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ و $\hat{E}BD = \hat{A}FE$ است. پس این دو مثلث متشابه‌اند و $\hat{A} = \hat{D} = \alpha$
است. پس:

$$\frac{EF}{BE} = \frac{AF}{BD} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{AF}{6} \Rightarrow AF = 3$$

حال دو مثلث ABC و CDF در زاویه $\hat{C}$ مشترک‌اند و دارای زاویه α هستند پس متشابه‌اند:

$$\triangle ABC \sim \triangle CDF: \frac{BC}{CF} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{5} = \frac{8}{6+x} \Rightarrow x^2 + 6x = 40 \Rightarrow x^2 + 6x - 40 = 0 \Rightarrow x = 4 \rightarrow BC = 4$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۴

$$\left. \begin{array}{l} EF \parallel BC, AB \text{ مورب} \Rightarrow \hat{GEF} = \hat{DBG} \\ \hat{G} = G \text{ متقابل به رأس} \\ EG = GB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز}} \triangle GEF \cong \triangle DBG \Rightarrow EF = BD$$

با استفاده از قضیه تالس در مثلث ABC داریم:

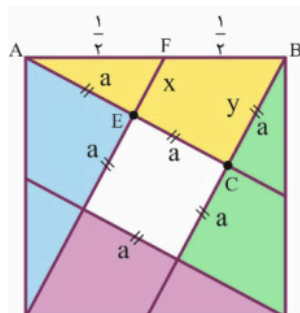
$$AF = FC \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow BC = 2x$$

$$\triangle EFK \sim \triangle DKC \Rightarrow \frac{x}{3x} = \frac{KE}{KC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{KC} \Rightarrow KC = 6$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵

طبق تالس داریم:



$$\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$$

$$\frac{AE}{a + AE} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \rightarrow AE = a$$

و به طریق مشابه $BC = a$ است، بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

روش اول:

$$S = S_{\text{ناحیه رنگی}} = S_{ABC} = \frac{AC \times BC}{2} = \frac{2a \times a}{2} = a^2$$

$$S = 4S_{\text{مربع کوچک}} + S_{\text{ناحیه رنگی}} = 4a^2 + a^2 = 5a^2 = 1 \rightarrow a^2 = \frac{1}{5} \rightarrow S_{\text{مربع کوچک}} = a^2 = \frac{1}{5}$$

روش دوم:

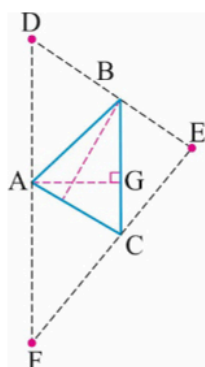
طبق رابطه فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow (2a)^2 + a^2 = 1 \rightarrow 5a^2 = 1$$

$$\rightarrow a^2 = \frac{1}{5} \rightarrow \text{مساحت مربع کوچک} = a^2 = \frac{1}{5}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۶



در این شکل مثلث ABC با AFC و ABD همنهشت است. بنابراین $AF = AD = BC$ و لذا A وسط پاره خط DF است.

$$\left. \begin{array}{l} AG \perp BC \\ BC \parallel DF \end{array} \right\} AG \perp DF$$

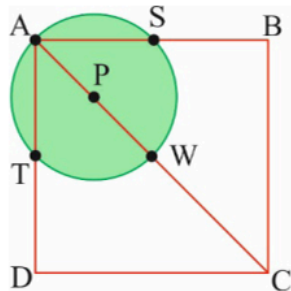
لذا خط AG عمود منصف پاره خط DF است و به طور مشابه برای سایر ارتفاعهای ABC قابل اثبات است.

پس ارتفاعهای ABC منطبق بر عمود منصفهای DEF می‌باشند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۷

ابتدا قطر را محاسبه می‌کنیم:



$$AC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 16 \rightarrow AC = 4$$

$$AC = AP + PC \Rightarrow 4 = \frac{AP + 3AP}{4AP} \Rightarrow \begin{cases} AP = 1 \\ PC = 3 \end{cases}$$

کافی است که به مرکز P دایره‌ای به شعاع ۱ رسم کنیم و محل برخورد آن با محیط مربع را بیابیم. مطابق شکل ۳ نقطه برخورد (S,T,A) وجود دارد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

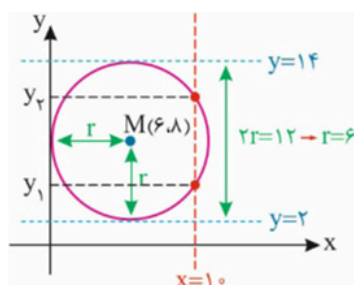
۲۸

سرنخ

از این که دایره بر محور y ها مماسه، سعی کنید شعاع رو پیدا کنید.

تک پله: با توجه به شکل، شعاع دایره $r=6$ ، مرکز دایره $M(6,8)$ و معادله دایره است. معادله دایره را با خط $X=10$ قطع می‌دهیم و داریم:

$$(10-6)^2 + (y-8)^2 = 36 \Rightarrow (y-8)^2 = 20 \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 8 + 2\sqrt{5} \\ y_1 = 8 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

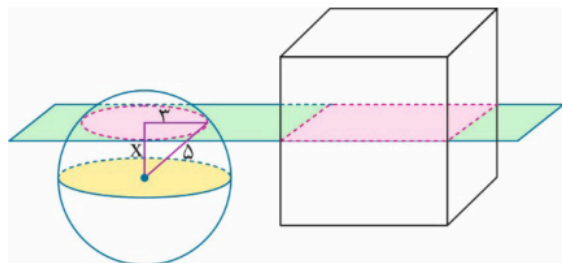
پس طول وتر ایجاد شده توسط خط $X=10$ برابر است با:

$$y_2 - y_1 = (8 + 2\sqrt{5}) - (8 - 2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۹

مطابق شکل داریم:



$$S_1 = S_2 \Rightarrow \pi r^2 = (3\sqrt{\pi})^2 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$$

بنابراین فاصله مرکز کره از صفحه برابر است با:

$$x^2 = 3^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$

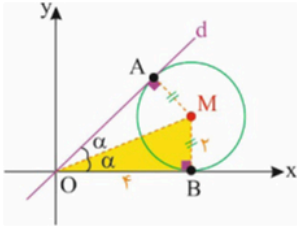
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۰

سرنخ به رابطه شیب خط و تانژانت توجه کنید.

AM بر خط مماس d و BM بر محور xها عمود است، پس می توان گفت نقطه M روی نیمساز OM قرار دارد.

شیب خط d برابر $\tan 2\alpha$ است. با توجه به این که مرکز دایره، نقطه $M(4, 2)$ است، پس $BM = 2$ و $OB = 4$ است. پس در مثلث OBM داریم:



$$\tan \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \left(\frac{1}{2} \right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۱

سرنخ دایره های C_1 و C_2 مماس خارج اند:

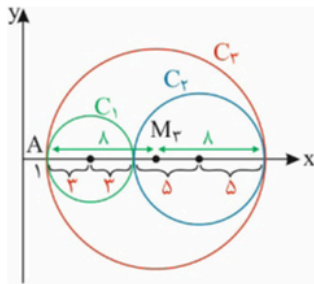
چون $|M_1 M_2| = 8$ و $R_2 = 5$ است، با توجه به شکل داریم:

$$|M_1 M_2| = 8 \Rightarrow R_1 + R_2 = 8 \Rightarrow R_1 + 5 = 8 \Rightarrow R_1 = 3$$

از طرفی قطر دایره C_3 برابر مجموع قطرهای دایره های C_1 و C_2 است، پس:

$$2R_3 = 2R_1 + 2R_2 \Rightarrow R_3 = R_1 + R_2 = 3 + 5 = 8$$

در ضمن، چون مرکز دایره C_1 و $R_1 = 3$ شعاع دایره C_1 می باشد پس نقطه تماس دایره C_1 و C_3 ، نقطه $A(1, 0)$ می باشد و شعاع دایره C_3 برابر ۸ است، پس مختصات مرکز دایره C_3 ، $M_3(9, 0)$ می باشد.

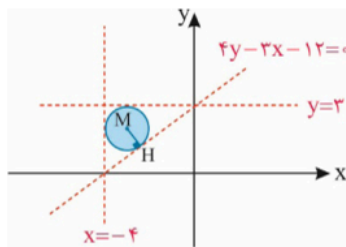


(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۲

سرنخ فاصله مرکز تا خط مماس بر دایره، شعاع رو میده.

مرکز دایره به صورت $M(-4+r, 3-r)$ است و داریم:



$$MH = r \Rightarrow \left| \frac{12-7r}{-3(-4+r)+4(3-r)-12} \right| = r \Rightarrow |12-7r| = 5r \Rightarrow \begin{cases} 12-7r = 5r \Rightarrow r = 1 \\ 12-7r = -5r \Rightarrow r = 6 \end{cases}$$

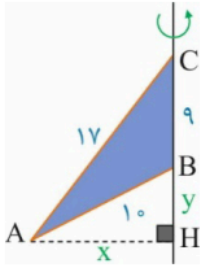
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۳

سرنخ

اگرچه شکلی ناقص، دوران کنه، باید با خودتون بگید اگر کامل بود چی می‌شد؟ بعد بگید حالا اون قسمتی که حذف شده چه شکلی ایجاد می‌کنه؟

با استفاده از رابطه فیثاغورث در مثلث ABH و ACH داریم:

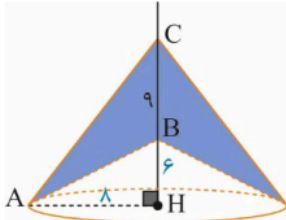


$$\triangle ABH: x^2 + y^2 = 10^2 = 100$$

$$\triangle ACH: x^2 + (y+9)^2 = 17^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{100} + 18y + 81 = 289 \Rightarrow 18y = 108 \Rightarrow y = 6$$

بنابراین $x = 8$ است و مطابق شکل، حجم حاصل از دوران برابر است با:



$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \times 8^2 \times 15 - \frac{1}{3}\pi \times 8^2 \times 6$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times 64 \times (15 - 6) = 192\pi$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۴

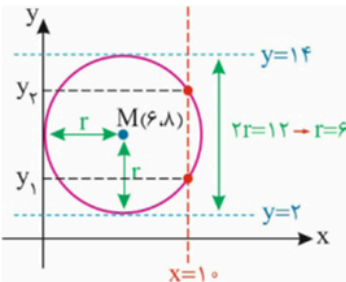
سرنخ

از این که دایره بر محور y ها مماسه، سعی کنید شعاع رو پیدا کنید.

تک پله: با توجه به شکل، شعاع دایره $r = 6$ ، مرکز دایره $M(6, 8)$ و $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 36$ معادله دایره است. معادله دایره را با خط $x = 10$ قطع می‌دهیم و داریم:

$$(10-6)^2 + (y-8)^2 = 36 \Rightarrow (y-8)^2 = 20 \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 8 + 2\sqrt{5} \\ y_1 = 8 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

پس طول وتر ایجاد شده توسط خط $x = 10$ برابر است با:



$$y_2 - y_1 = (8 + 2\sqrt{5}) - (8 - 2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۵

سرنخ

دایره‌های C_1 و C_2 مماس خارج‌اند:

چون $|M_1M_2| = 8$ و $R_2 = 5$ است، با توجه به شکل داریم:

$$|M_1M_2| = 8 \Rightarrow R_1 + R_2 = 8 \Rightarrow R_1 + 5 = 8 \Rightarrow R_1 = 3$$

از طرفی قطر دایره C_3 برابر مجموع قطرهای دایره‌های C_1 و C_2 است، پس:

$$2R_3 = 2R_1 + 2R_2 \Rightarrow R_3 = R_1 + R_2 = 3 + 5 = 8$$

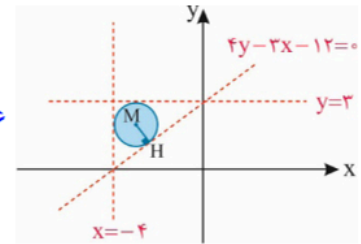
در ضمن، چون $M_1(4, 0)$ مرکز دایره C_1 و $R_1 = 3$ شعاع دایره C_1 می‌باشد پس نقطه تماس دایره C_1 و C_3 ، نقطه $A(1, 0)$ می‌باشد و شعاع دایره C_3 برابر ۸ است، پس مختصات مرکز دایره C_3 ، $M_3(9, 0)$ می‌باشد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

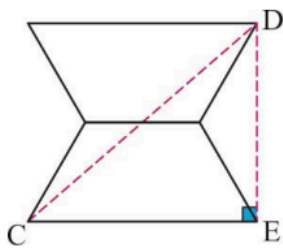
۳۶ **سرنخ** فاصله مرکز تا خط مماس بر دایره، شعاع رو می‌ده.

مرکز دایره به صورت $M(-4+r, 3-r)$ است و داریم:

$$MH = r \Rightarrow \left| \frac{\overbrace{-3(-4+r) + 4(3-r) - 12}^{12-7r}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = r \Rightarrow |12 - 7r| = 5r \Rightarrow \begin{cases} 12 - 7r = 5r \Rightarrow r = 1 \\ 12 - 7r = -5r \Rightarrow r = 6 \end{cases}$$



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



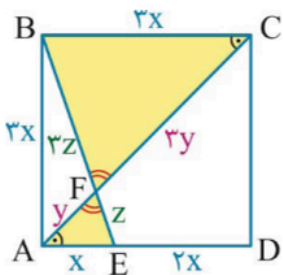
۳۷ طول ضلع شش ضلعی برابر $a = 5$ است. در ضمن طول DE برابر قطر کوچک شش ضلعی و طول CE برابر قطر بزرگ شش ضلعی است، پس:

$$DE = a\sqrt{3} = 5\sqrt{3}, CE = 2a = 2 \times 5 = 10$$

حال با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث CDE داریم:

$$CD^2 = CE^2 + DE^2 \Rightarrow CD^2 = (10)^2 + (5\sqrt{3})^2 = 175 \Rightarrow CD = 5\sqrt{7}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



$$\frac{BC}{AE} = \frac{CF}{AF} = \frac{BF}{FE} = 3$$

۳۸ مطابق شکل، دو مثلث AEF و BCF به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند. پس:

$$\triangle ABC \text{ مثلث } (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow AC = 3x\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 4y = 3x\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{2}}{4}x$$

$$\triangle ABE \text{ مثلث } (BE)^2 = (AE)^2 + (AB)^2 \Rightarrow (4z)^2 = x^2 + 9x^2$$

$$\Rightarrow 4z = x\sqrt{10} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{10}}{4}x$$

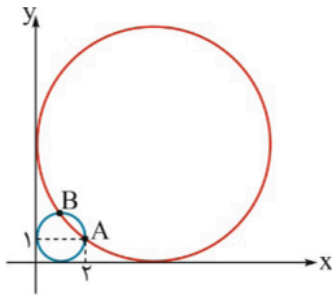
حالا نسبت EF به AF را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{EF}{AF} = \frac{z}{y} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{4}x}{\frac{3\sqrt{2}}{4}x} = \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۹

چون این دایره‌ها در ربع اول بر محورهای مختصات مماس هستند، پس معادله آن‌ها به صورت $(x-R)^2 + (y-R)^2 = R^2$ است. چون نقطه $A(2,1)$ روی این دایره‌ها قرار دارد، پس در معادله دایره صدق می‌کند:



$$(2-R)^2 + (1-R)^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 4R + 4 + R^2 - 2R + 1 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 6R + 5 \Rightarrow \begin{cases} R=1 \\ R=5 \end{cases}$$

پس معادله این دو دایره به صورت $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ و $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ است. حالا معادله دایره‌ها را به فرم گسترده می‌نویسم و با حل دستگاه، معادله وتر مشترک را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow 8x + 8y - 24 = 0 \Rightarrow x + y = 3$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$ABC \text{ محیط مثلث } = AB + AC + \underbrace{BC}_8 = 20$$

$$\Rightarrow AB + AC = 12$$

پس همواره مجموع فواصل A از دو نقطه B و C برابر با ۱۲ است. یعنی A روی یک بیضی به کانون‌های B و C قرار داد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$b = 3 \rightarrow b = 6 = 2b = \text{قطر کوچک}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \rightarrow c = \frac{4}{5}a$$

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \rightarrow \frac{16}{25} = 1 - \frac{9}{a^2} \rightarrow a = 5 \rightarrow c = 4$$

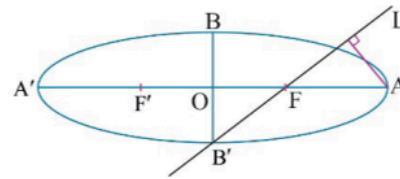
$$O(-4, -1) \rightarrow \begin{cases} F(-4+4, -1) = F(0, -1) \\ B'(-4, -1-3) = B'(-4, -4) \rightarrow \text{شیب خط } FB' = m = \frac{-4+1}{-4-0} = \frac{3}{4} \\ A(-4+5, -1) = A(1, -1) \end{cases}$$

$$B' \text{ و } F : \text{معادله خط گذرنده از } y - (-1) = \frac{3}{4}(x - 0) \rightarrow y = \frac{3}{4}x - 1$$

$$\rightarrow 3x - 4y - 4 = 0$$

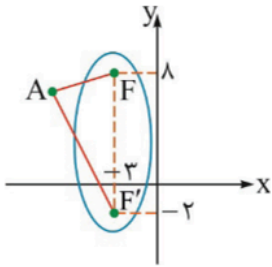
$$L \text{ از } A(1, -1) \text{ فاصله نقطه } = \frac{|3(1) - 4(-1) - 4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



۴۱

۴۲



$$FF' = 2c = 10 \Rightarrow c = 5$$

$$\frac{c}{a} = 0.5 \Rightarrow \frac{5}{a} = 0.5 \Rightarrow a = 10$$

$$AF + AF' > 2a \Rightarrow x + 1 + 2x - 2 > 20 \Rightarrow x > 7$$

چون A خارج از بیضی قرار دارد، پس:

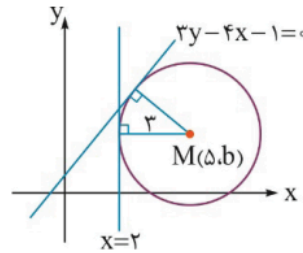
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۳

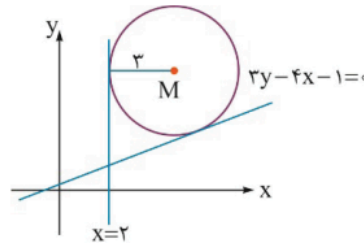
با توجه به شکل، طول مرکز ۵ است و فاصله آن از خط $3y - 4x - 1 = 0$ برابر با شعاع دایره است.

$$\frac{|3b - 4(5) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3 \Rightarrow |3b - 21| = 15 \Rightarrow |b - 7| = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b - 7 = 5 \Rightarrow b = 12 \\ b - 7 = -5 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$



توجه کنید در حالتی که $b = 12$ است شکل به صورت زیر است:



با توجه به این که مختصات مرکز $M(5, b)$ است، پس عرض مرکز دایره برابر $b = 2$ یا $b = 12$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۴

برای این که بتوانیم از نقطه $A(m, -1)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم، باید نقطه A خارج از دایره قرار گیرد، پس باید $f(A) > 0$ باشد:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y \xrightarrow{A(m, -1)} m^2 + 1 - 2m + 4(-1) > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 3 > 0 \Rightarrow (m - 3)(m + 1) > 0 \Rightarrow m < -1 \text{ یا } m > 3$$

پس محدوده m برابر $R - [-1, 3]$ است.

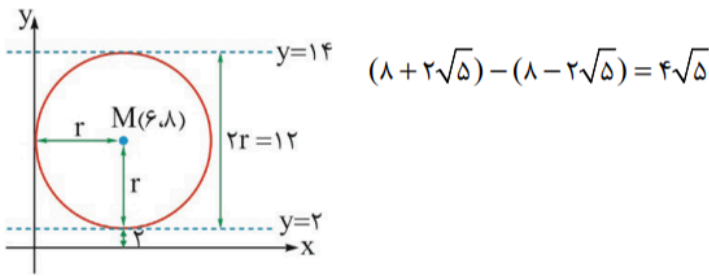
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۵

با توجه به شکل، شعاع دایره $r=6$ ، مرکز دایره $M(6,8)$ و معادله دایره است. معادله دایره را با خط $X=10$ قطع می‌دهیم و داریم:

$$(10-6)^2 + (y-8)^2 = 36 \Rightarrow (y-8)^2 = 20 \Rightarrow \begin{cases} y = 8 + 2\sqrt{5} \\ y = 8 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

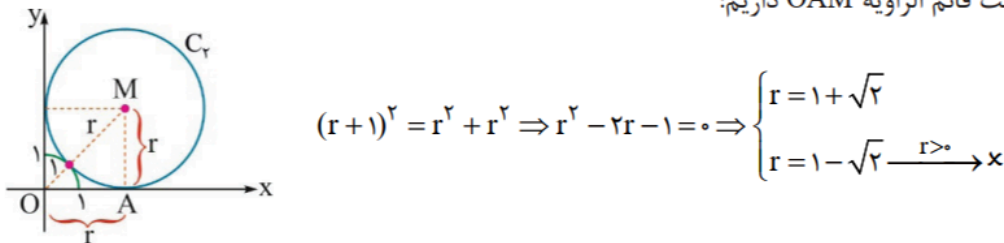
پس طول وتر ایجاد شده توسط خط $X=10$ برابر است با:



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۶

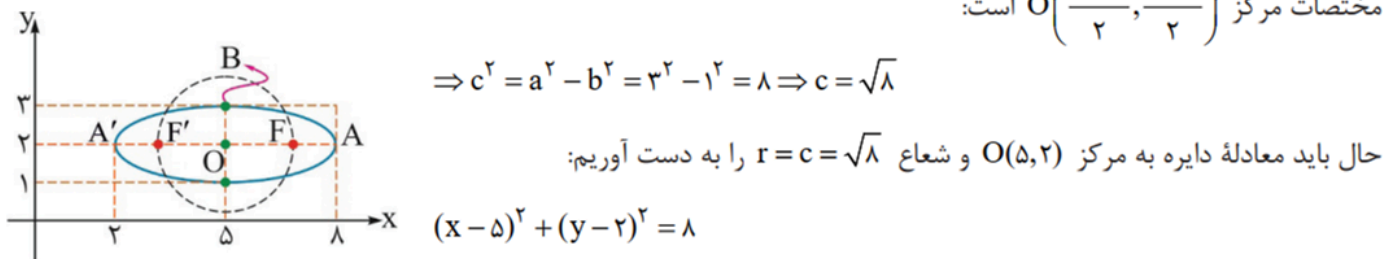
چون مرکز دایره C_1 ، نقطه $O(0,0)$ و مرکز دایره C_2 ، نقطه $M(r,r)$ است، پس واضح است که نقطه تماس دو دایره روی خط‌المركزین آنها یعنی $y=x$ باشد. حال در مثلث قائم الزاویه OAM داریم:



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۷

فاصله دو نقطه $A(8,2)$ و $A'(2,2)$ برابر $2a = 8 - 2 = 6$ و فاصله دو نقطه $B(5,3)$ و $B'(\delta,1)$ برابر $2b = 3 - 1 = 2$ است. از طرفی مختصات مرکز $O\left(\frac{2+8}{2}, \frac{2+2}{2}\right)$ است:



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

၂၄၅

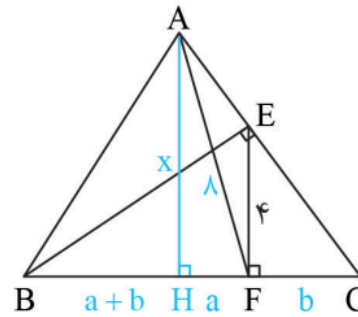
$$EF^2 = BF \cdot FC \rightarrow 16 = b(2a + b)$$

$$16 = b^2 + 2ab$$

$$\triangle AHF: 64 = x^2 + a^2$$

$$\triangle ABH: AB^2 = (a + b)^2 + x^2$$

$$AB^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + 2ab + x^2}_{64} \quad AB = \sqrt{64} = 8\sqrt{a}$$



۵۰

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

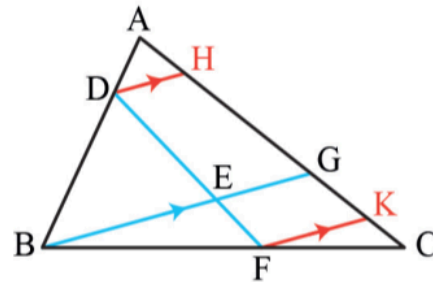
$$\triangle BCG: \frac{BF}{FC} = \frac{GK}{KC} \Rightarrow \frac{GK}{KC} = 2$$

$$\Rightarrow KC = x, GK = 2x$$

$$\triangle HKF: \frac{GH}{GK} = \frac{DE}{EF} \Rightarrow \frac{GH}{2x} = 2 \Rightarrow GH = 4x$$

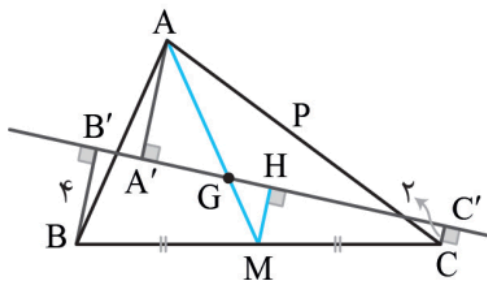
$$\triangle ABG: \frac{AH}{GH} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{AH}{4x} = \frac{1}{2} \Rightarrow AH = \frac{2x}{1}$$

$$\frac{GC}{AG} = \frac{x + 2x}{4x + \frac{2x}{1}} = \frac{2}{5}$$



۵۱

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



۵۲ میانه AM را رسم کرده و از نقطه M بر B'C' عمود می‌کنیم.

الآن در دوزنقه CC'B'B، پاره خط MH موازی دو ساق است و از وسط BC می‌گذرد. پس طولش معادل قاعده‌ها است:

$$MH = \frac{B'B + C'C}{2} = 3$$

حالا دو مثلث GMH و GAA' متشابه‌اند (زاویه قائمه و زوایای G برابرند) پس داریم:

$$\frac{GA}{GM} = \frac{AA'}{HM}$$

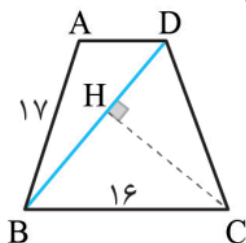
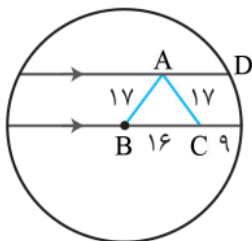
می‌دانیم نسبت $\frac{GA}{GM}$ همیشه ۲ است (میانها به نسبت ۲ به ۱ در G متقاطع‌اند) پس داریم:

$$\frac{AA'}{3} = 2 \Rightarrow AA' = 6$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۳

فاصله C از BD برابر طول ارتفاع رأس در مثلث CBD است.



مساحت مثلث ABC را حساب می‌کنیم:

$$AM^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \Rightarrow AM = 15$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{16 \times 15}{2} = 120 = S_{DBC}$$



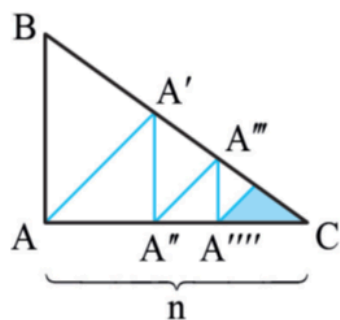
پس:

$$CH = \frac{2S_{BCD}}{BD} = \frac{2 \times 120}{25} = \frac{240}{25} = \frac{48}{5} = 9.6$$

$$S_{ABC} = S_{DBC}$$

$$BD = 25$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



$$\sqrt{(kx)^2 + x^2} = x\sqrt{1+k^2}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AA'C \Rightarrow \alpha = \text{نسبت تشابه} = \frac{AC}{BC} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

در نتیجه نسبت مساحت‌ها در هر مرحله برابر $\alpha^2 = \frac{k^2}{1+k^2}$ است و پس از n مرحله نسبت مساحت مثلث انتخاب شده به مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\alpha^2 = \frac{k^{2n}}{(1+k^2)^n}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۴

اولین مثلث متشابه بزرگ ($\triangle AA'C$) وترى برابر AC دارد.مثلث از دو ارتفاع kx و x تشکیل شده است، در نتیجه وتر آن برابر است با:

۵۵ بر طبق قضیه سینوس ها در مثلث B'MF داریم:

$$\frac{\sin \hat{M}}{B'F} = \frac{\sin \hat{B}'}{MF} \Rightarrow \frac{\sin \hat{M}}{\sin \hat{B}'} = \frac{B'F}{MF} = \frac{a}{\frac{b^2}{a}} = \frac{a^2}{b^2}$$

یادآوری: طول MF برابر $\frac{b^2}{a}$ است.

حالا با توجه به $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ می نویسیم:

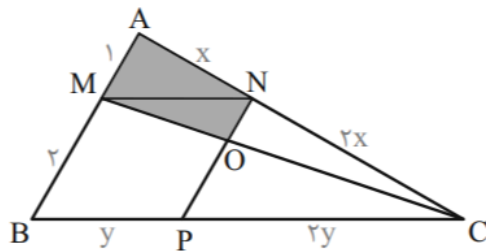
$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = 4$$

پس جواب می شود:

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



۵۶ با توجه به نتایج قضیه تالس، تناسب اضلاع را در شکل آورده ایم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{CAM} = \frac{1}{3} S_{ABC} \quad \text{تشابه: } S_{CON} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{CAM} = \frac{4}{9} S_{CAM}$$

$$\Rightarrow S_{OMAN} = \frac{5}{9} S_{CAM} = \frac{5}{9} \times \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{5}{27} S_{ABC}$$

پس سهم دوزنقه OMAN، $\frac{5}{27}$ کل مساحت است.

$$\text{تشابه: } S_{CPN} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{ABC} = \frac{4}{9} S_{ABC}, S_{AMN} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_{ABC}$$

$$\Rightarrow S_{MNPB} = S_{ABC} - \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) S_{ABC} = \frac{4}{9} S_{ABC}$$

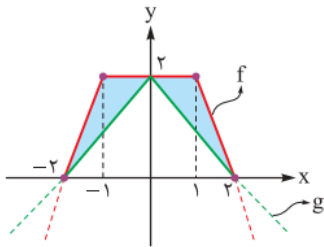
پس نسبت مساحت OMAN به MNPB می شود $\frac{\frac{5}{27}}{\frac{4}{9}}$ ، یعنی $\frac{5}{12}$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

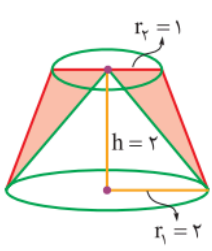
گام اول: برای رسم نمودار تابع $g(x) = 2 - |x|$ ، ابتدا نمودار تابع $y = |x|$ را نسبت به محور x ها قرینه کرده $(y = -|x|)$ و سپس دو واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

گام دوم: برای رسم نمودار تابع $f(x) = 4 - |x - 1| - |x + 1|$ ، بهترین روش آن است که مقدار تابع را در هر یک از ریشه‌های داخل قدرمطلق و یک نقطه قبل و یک نقطه بعد از آن‌ها به دست آوریم. نقاط به دست آمده را روی محورهای مختصات مشخص کنیم، سپس آن‌ها را به هم وصل کنیم.

x	-۲	-۱	۱	۲
$f(x)$	۰	۲	۲	۰



گام سوم: نمودار دو تابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و سطح محدود به این دو نمودار را سایه می‌زنیم.



گام چهارم: از دوران سطح سایه‌خورده نسبت به محور y ها، حجم زیر به دست آید. این حجم به صورت زیر بررسی می‌کنیم:

(حجم مخروط به شعاع قاعده r_1 و ارتفاع h) - (حجم مخروط ناقص به شعاع‌های قاعده r_1 و r_2 و ارتفاع h): حجم مورد نظر

$$V = \frac{1}{3} \pi \times h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) - \frac{1}{3} \pi h r_1^2 \xrightarrow[r_1=1, r_2=2]{h=2} V = \frac{1}{3} \pi \times 2 (2^2 + 2 \times 1 + 1^2) - \frac{1}{3} \pi \times 2 (1)^2$$

$$= \frac{14\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} = 4\pi$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: مطابق شکل زیر، زوایای محاطی $\widehat{FMF'}$ و $\widehat{FNF'}$ رو به قطر دایره و قائمه هستند.

گام دوم: در مثلث قائم‌الزاویه FMF' با فرض $MF = x$ و $MF' = y$ داریم:

$$x^2 + y^2 = (2c)^2 = 4c^2 \quad (1) \quad \text{فیثاغورس}$$

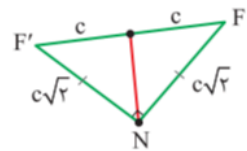
گام سوم: نقطه M روی بیضی است و مجموع فواصل آن از دو کانون بیضی برابر با $2a$ است که در این جا

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow x + y = 6 \quad (2)$$

$2a = 6$ می‌باشد، پس:

گام چهارم: مساحت مثلث FMF' برابر با $\frac{xy}{2}$ است. طرفین تساوی (۲) را به توان ۲ می‌رسانیم و در ادامه از تساوی (۱) در آن جای گذاری می‌کنیم تا عبارت xy ظاهر شود.

$$x + y = 6 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \underbrace{x^2 + y^2}_{4c^2} + 2xy = 36 \xrightarrow{(1)} 4c^2 + 2xy = 36 \Rightarrow 2xy = 36 - 4c^2 \Rightarrow S_1 = \frac{xy}{2} = 9 - c^2$$



گام پنجم: مثلث FNF' قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است که طول وتر آن برابر با $2c$ است، پس مساحت آن

$$S_2 = \frac{c\sqrt{2} \times c\sqrt{2}}{2} = c^2$$

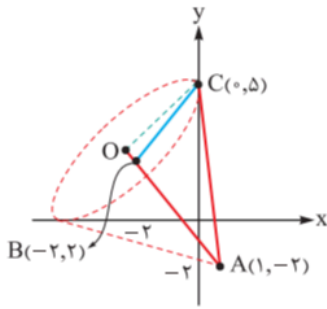
برابر است با:

$$S_{MFNF'} = S_1 + S_2 = 9 - c^2 + c^2 = 9$$

گام ششم: مساحت چهارضلعی $MFNF'$ را به دست می‌آوریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

با توجه به شکل روبه‌رو، حجم حاصل برابر با اختلاف حجم دو مخروط است:



$$y - 2 = \frac{2 - (-2)}{-2 - 1}(x + 2) \Rightarrow y + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

راه اول: گام اول: معادله خط عبوری از AB را می‌نویسیم.

$$r = \frac{\left| 5 + 0 + \frac{2}{3} \right|}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{17}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{17}{5}$$

گام دوم: فاصله نقطه C از این خط برابر با شعاع مخروط‌هاست.

گام سوم: معادله خط عبوری از OC را می‌نویسیم. شیب این خط قرینه و معکوس شیب پاره خط AB است.

$$m = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{معادله خط OC: } y - 5 = \frac{3}{4}x \Rightarrow y - \frac{3}{4}x - 5 = 0$$

$$h_{\text{کوچک}} = \frac{\left| 2 - \frac{3}{4}(-2) - 5 \right|}{\sqrt{1^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{12}{10} = 1/2$$

$$h_{\text{بزرگ}} = \frac{\left| -2 - \frac{3}{4}(1) - 5 \right|}{\sqrt{1^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{\frac{31}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{31}{5} = 6/2$$

گام پنجم: اختلاف حجم مخروط‌ها برابر است با:

$$V = \frac{\pi r^2}{3} (h_{\text{بزرگ}} - h_{\text{کوچک}}) = \frac{\pi \left(\frac{17}{5}\right)^2}{3} (6/2 - 1/2) = \frac{289}{15} \pi$$

راه دوم: گام اول: ابتدا مساحت مثلث را حساب می‌کنیم.



$$S = \frac{1}{2} |(1)(2) + (-2)(5) + (0)(-2) - (-2)(-2) - (0)(2) - (1)(5)|$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |2 - 10 - 4 - 5| = \frac{17}{2}$$

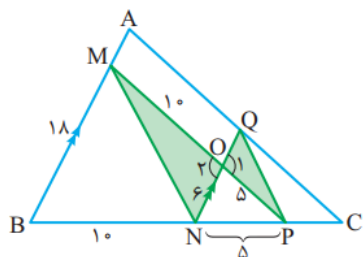
گام دوم: طول ضلع AB را به دست می‌آوریم.

$$a = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (2 + 2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

گام سوم: حجم حاصل از دوران برابر است با:

$$V = \frac{4}{3} \pi \frac{S^2}{a} = \frac{4}{3} \times \pi \times \frac{\left(\frac{17}{2}\right)^2}{5} = \frac{289}{15} \pi$$

گام اول: از قضیه تالس در مثلث Δ BMP استفاده می‌کنیم:



$$\text{NO} \parallel \text{BM} \Rightarrow \frac{\text{NO}}{\text{BM}} = \frac{\text{OP}}{\text{MP}} = \frac{\text{NP}}{\text{BP}}$$

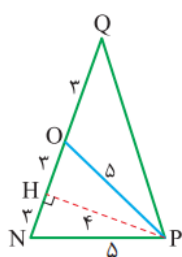
$$\Rightarrow \frac{6}{18} = \frac{\Delta}{MP} = \frac{NP}{NP+10} \Rightarrow \begin{cases} MP = \frac{18 \times \Delta}{6} = 18 \\ NP = \Delta \end{cases}$$

گام دوم: دو مثلث $\triangle OMN$ و $\triangle OPQ$ نیز با هم متشابه هستند؛ زیرا:

$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_r \\ PQ \parallel MN, \text{موجب} NQ \end{cases} \xrightarrow{\text{زج}} \overset{\Delta}{OPQ} \sim \overset{\Delta}{OMN}$$

$$\frac{ON}{OQ} = \frac{OM}{OP} \Rightarrow \frac{r}{OQ} = \frac{1}{5} \Rightarrow OQ = 5r$$

پس داریم:

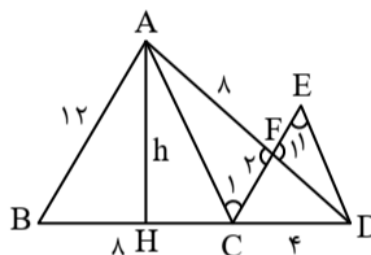


گام سوم: مثلث ΔNOP متساوی الساقین است و ارتفاع وارد بر ضلع NO ، قاعده را نصف می کند؛ پس:

$$PH = 4 \Rightarrow PQ = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

در مثلث $\triangle ABD$ داریم:



$$FC \parallel AB \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{FC}{AB} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{FC}{12} \Rightarrow FC = 4$$

$$\frac{CD}{BD} = \frac{DF}{AD} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{DF}{DF+8} \Rightarrow DF = 4$$

$$AC \parallel ED \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{C}_1 \xrightarrow{\hat{F}_1 = \hat{F}_2} \hat{E}FD \approx \hat{A}FC \Rightarrow \frac{AC}{ED} = \frac{AF}{FD} = \frac{\lambda}{\varphi} = \gamma \text{ (*) رابطه}$$

چون طول همه اضلاع مثلث $\triangle ABD$ برابر ۱۲ است، پس متساوی الاضلاع می باشد. ارتفاع وارد بر ضلع BC را h می نامیم. ارتفاع AH میانه نیز می باشد، پس $BH = ۶$ و $CH = ۲$.

ابتدا h را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{فيثاغورس } \triangle ABH : h^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow h = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$$

اکنون AC را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{فيثاغورس } \overset{\Delta}{\text{ACH}} : h^2 + CH^2 = AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4\sqrt{7}$$

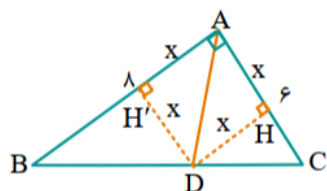
$$\xrightarrow{\text{رابطه (*)}} \frac{AC}{ED} = 2 \Rightarrow ED = 2\sqrt{7}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۲

AD نیمساز می‌باشد. اگر از نقطه D عمودهای DH و DH' را بر اضلاع مثلث رسم کنیم، چهارضلعی AHDH' مستطیل است.

ضمناً D روی نیمساز A است، پس $DH = DH'$ ، بنابراین چهارضلعی AHDH' مربع است.



اگر طول ضلع این مربع را x در نظر بگیریم، مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC} \Rightarrow \frac{6 \times 8}{2} = \frac{8x}{2} + \frac{6x}{2} \Rightarrow 14x = 48 \Rightarrow x = \frac{48}{14} = \frac{24}{7} \Rightarrow AD = \frac{24}{7}\sqrt{2}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۳

ابتدا توجه کنید که در مثلث ABC طبق فیثاغورس داریم:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 5 = 3 \times 4 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

$$AH' = AH - HH' \xrightarrow{HH'=2} AH' = \frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5}$$

MNPQ مستطیل است $\Rightarrow MN \parallel BC$

$$\triangle ABC : MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AH'}{AH} = k \Rightarrow \frac{\frac{2}{5}}{\frac{12}{5}} = \frac{MN}{5} \Rightarrow MN = \frac{5}{6}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۴

نکته (قضیه اساسی تشابه): اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر (یا امتداد آن‌ها) را قطع کند، در این صورت مثلث کوچک پدیدآمده با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

$$DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

از C خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا DE را در M قطع کند. طبق قضیه اساسی تشابه داریم:

$$CM \parallel AF \Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle ECM$$

حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{AF}{CM} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{3}{CM} = \frac{5}{EC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{CM}{EC} \quad (I)$$

از طرفی $BF \parallel CM$ است، پس طبق قضیه اساسی تشابه داریم:

$$\triangle DMC \sim \triangle DFB \Rightarrow \frac{CM}{BF} = \frac{DC}{DB} \xrightarrow{BF=EC} \frac{CM}{EC} = \frac{DC}{DB} \xrightarrow{(I)} \frac{DC}{DB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{5}{3}$$

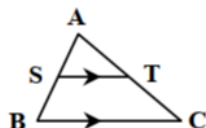
پس نسبت $\frac{DB}{DC}$ برابر $\frac{5}{3}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۶۵

نکته (تعمیم قضیه تالس): در شکل روبه‌رو، اگر $ST \parallel BC$ ، آنگاه:

$$\frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} = \frac{ST}{BC}$$



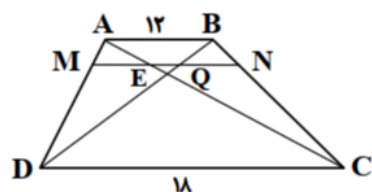
$$\frac{AM}{MD} = \frac{1}{5} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}} \frac{AM}{AM+MD} = \frac{1}{5+1} \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{MD}{AD} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\triangle ABD: MQ \parallel AB \Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{MQ}{AB} \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{MQ}{12} \Rightarrow MQ = 10$$

$$\triangle ACD: ME \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{ME}{CD} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{ME}{18} \Rightarrow ME = 3$$

$$EQ = MQ - ME = 10 - 3 = 7$$

بنابراین:



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۶۶

نکته (قضیه تالس و تعمیم آن):

فرض کنید مانند شکل مقابل پاره خط DE موازی ضلع BC باشد. آنگاه:

$$\text{تالس (جزء به جزء): } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\text{تعمیم تالس (جزء به کل): } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

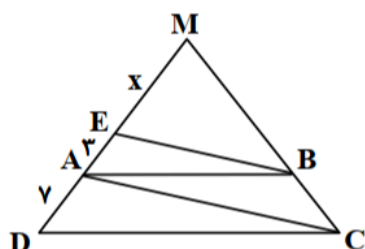
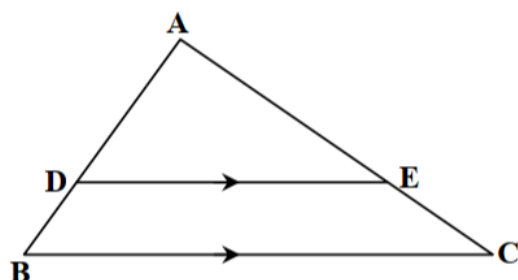
چون ABCD دوزنقه است، پس $AB \parallel CD$. با فرض $ME = x$ داریم:

$$\begin{cases} \triangle MDC: AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow \frac{x+3}{7} = \frac{MB}{BC} \\ \triangle MAC: EB \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ME}{EA} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{MB}{BC} \end{cases}$$

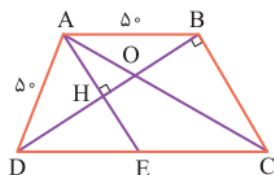
$$\Rightarrow \frac{x+3}{7} = \frac{x}{3} \Rightarrow 3x+9=7x \Rightarrow 4x=9 \Rightarrow x=2/25$$

$$MD = 2/25 + 3 + 7 = 12/25$$

بنابراین طول MD برابر است با:



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



گام اول: مثلث ABD متساوی الساقین است، پس ارتفاع AH در این مثلث، میانه قاعده BD است، یعنی H وسط قطر BD قرار دارد و در نتیجه $OH = 10^\circ$ است. از طرفی داریم:

$$\begin{cases} BC \perp BD \\ AE \perp BD \end{cases} \Rightarrow AE \parallel BC$$

گام دوم: با توجه به این که $AE \parallel BC$ ، پس چهارضلعی $ABCE$ متوازی الاضلاع است و $AE = BC$. از طرفی طبق قضیه تالس در مثلث BDC داریم:

$$HE \parallel BC \Rightarrow \frac{HE}{BC} = \frac{DH}{DB} = \frac{1}{2} \Rightarrow HE = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AH = \frac{1}{2}BC$$

دو مثلث OAH و OBC به دلیل موازی بودن AH و BC متشابه‌اند، پس داریم:

$$\frac{OH}{OB} = \frac{AH}{BC} \Rightarrow \frac{10^\circ}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow OB = 20^\circ$$

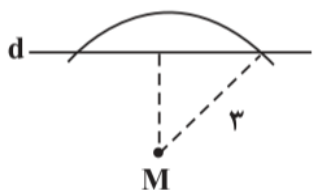
$$BH = OH + OB = 10^\circ + 20^\circ = 30^\circ \Rightarrow BD = 2BH = 60^\circ$$

گام سوم: در متوازی الاضلاع $ABCE$ ، $CE = AB = 50^\circ$ است و با توجه به قضیه تالس در مثلث BDC ، $DC = 2EC = 100^\circ$. حال طبق قضیه فیثاغورس در مثلث BDC داریم:

$$BC^2 = CD^2 - BD^2 = 100^2 - 60^2 = 6400 \Rightarrow BC = 80^\circ$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

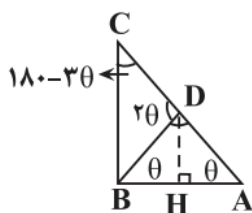
$$\begin{aligned} -x^2 + 4x + (m+1) &< 3 \\ -x^2 + 4x + (m-2) &< 0 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ \alpha = -1 < 0 \end{cases} \rightarrow 16 + 4(m-2) < 0 \Rightarrow 4m < -8 \rightarrow m < -2$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

در صورتی که $\hat{A} = \theta$ باشد، آنگاه $\hat{B} = 2\hat{A} = 2\theta$ و محل برخورد نیم‌ساز زاویه B را با AC ، نقطه D نامیده‌ایم. مثلث BAD متساوی الساقین است. D روی عمود منصف AB است. D می‌تواند در حالتی که $\hat{A} = 45^\circ$ است، وسط AC باشد اما مثلث BAD هیچ‌وقت متساوی الاضلاع نخواهد بود.

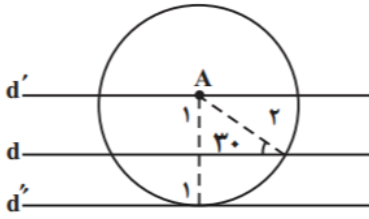


(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۰

چون $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ، پس فاصله نقطه A از خط برابر ۱ است. اگر دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ رسم کنیم، این دایره خطوط d' و d'' را مجموعاً در ۳ نقطه قطع می‌کند.

که این نقاط به فاصله ۲ از نقطه A و به فاصله ۱ از خط d می‌باشند.

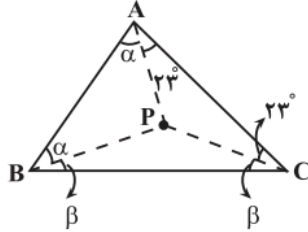


(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۱

در مثلث ABC، از نقطه P به رأس‌های مثلث وصل می‌کنیم. با توجه به اینکه این نقطه محل برخورد عمود منصف‌های اضلاع مثلث است، فاصله P از رأس‌های مثلث با هم برابرند:

$$PA = PB = PC$$



چون مثلث‌های APB، APC و BPC متساوی‌الساقین هستند، زاویه‌های پای‌ساق آن‌ها برابرند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\hat{PAC} = \hat{PCA} = 23^\circ, \hat{PAB} = \hat{PBA} = \alpha, \hat{PBC} = \hat{PCB} = \beta$$

با توجه به شکل، جمع زوایای داخلی مثلث را در نظر می‌گیریم:

$$2\alpha + 2\beta + 2 \times 23 = 180 \rightarrow 2(\alpha + \beta) = 134 \rightarrow \alpha + \beta = 67^\circ \rightarrow \hat{ABC} = 67^\circ$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۲

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \alpha \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{a+b}{b} = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)^2 \Rightarrow \frac{(x+y)(a+b)}{yb}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۳

در مثلث ABC داریم:

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{1}{\Delta} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow CE = \frac{CB}{\Delta}$$

در مثلث CAM داریم:

$$\frac{CF}{CM} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow \frac{CF}{\frac{1}{2}BC} = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow CF = \frac{BC}{10}$$

در نتیجه طول EF را به صورت زیر برحسب BC محاسبه می‌کنیم:

$$EF = CE - CF = \frac{BC}{\Delta} - \frac{BC}{10} = \frac{BC}{10}$$

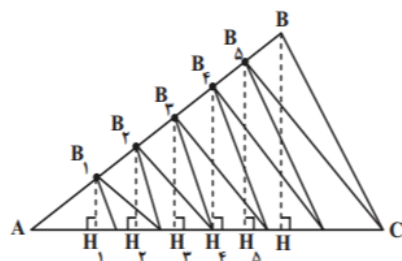
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۴

کافیست نسبت مساحت یکی از قسمت‌ها (سایه زده شده یا سفید) را به مساحت کل حساب کنیم

نسبت مساحت مثلث‌های سفید رنگ به مساحت مثلث ABC به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = B_5B \\ B_1H_1 \parallel B_2H_2 \parallel B_3H_3 \parallel \dots \parallel BH, \quad BH = h \end{cases}$$



$$\text{تالس} \quad B_1H_1 = \frac{h}{m}, \quad B_2H_2 = \frac{2h}{m}, \quad \dots, \quad B_mH_m = \frac{mh}{m} \quad S_{\text{سفید}} = S_{B_1C_1C_2} + S_{B_2C_2C_3} + \dots + S_{B_mC_mC} = \frac{1}{2} \left[m \times \frac{h}{m} + m \times \frac{2h}{m} + \dots + m \times \frac{mh}{m} \right]$$

$$= \frac{1}{2} m \times \frac{(1+2+\dots+m)h}{m} = \frac{1}{2} m \times \frac{mh}{2} = \frac{mh}{4}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times m \times h = mh \quad S_{\text{قسمت‌ها شور خورده}} = mh - \frac{mh}{4} = \frac{3mh}{4} \quad \frac{S_{\text{قسمت‌ها شور خورده}}}{S_{\text{قسمت‌سفید}}} = \frac{\frac{3mh}{4}}{\frac{mh}{4}} = 3$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۵

با توجه به اینکه مثلث BDC قائم‌الزاویه است، بنابراین $DC = 2$. همچنین ارتفاع مثلث EFD (قاعده مخروط) برابر با $\sqrt{3} \times 2 = \sqrt{3}$ است.

برای به دست آوردن حجم حاصل، ابتدا حجم استوانه کامل که از دوران مربع $ABDE$ (با شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۲)

و حجم مخروط که از دوران مثلث DBC (با شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۲) به وجود می‌آید را حساب می‌کنیم، و سپس فضای خالی حاصل از دوران مثلث

EFD را که از ۲ مخروط (با شعاع قاعده $\sqrt{3}$ و ارتفاع ۱) به دست آمده را کم می‌کنیم:

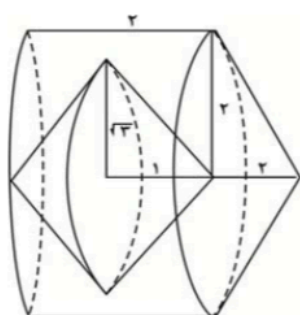
$$\text{حجم استوانه} = \pi \times 2^2 \times 2 = 8\pi$$

$$\text{DBC از مخروط حاصل} = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 2 = \frac{8\pi}{3}$$

$$\text{DEF از مخروط حاصل} = 2 \times \left(\frac{1}{3} \times \pi \times (\sqrt{3})^2 \times 1 \right) = 2\pi$$

بنابراین حجم حاصل برابر است با:

$$8\pi + \frac{8\pi}{3} - 2\pi = \frac{16\pi}{3}$$



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۶

مطابق شکل و براساس مرکز $O(1, 2)$ ، کانون‌های بیضی نقاط $(18, 2)$ و $(2, 2)$ می‌باشند. مجموع فاصله نقطه $(2, 0)$ از کانون‌های بیضی برابر همان قطر بزرگ یا $2a$ است.

$$(2, 0), \quad F(18, 2), \quad F'(2, 2)$$

$$\sqrt{(18-2)^2 + (2-0)^2} + \sqrt{(2-2)^2 + (2-0)^2} = 2a \Rightarrow 2\sqrt{65} + 2 = 2a \Rightarrow a = \sqrt{65} + 1$$

فاصله کانونی بیضی برابر $18 - 2 = 16$ است؛ پس:

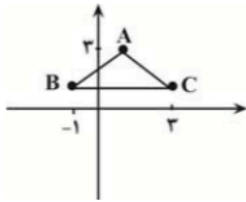
$$2c = 16 \Rightarrow c = 8$$

$$\text{خروج از مرکز: } e = \frac{c}{a} = \frac{8}{\sqrt{65} + 1} = \frac{\sqrt{65} - 1}{8}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

ابتدا سه نقطه را در صفحه مشخص می‌کنیم. پس از آن مرکز و شعاع دایره گذرنده از سه نقطه **A** و **B** و **C** را تعیین می‌کنیم.

نوع مثلث را بررسی می‌کنیم:



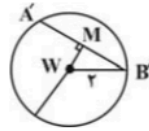
$$m_{AB} = \frac{1-1}{-1-1} = \frac{-2}{-2} = 1, m_{AC} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{m_{AC}}$$

این مثلث در رأس **A** قائمه است.

از طرفی می‌دانیم که در دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه، طول قطر برابر با طول وتر مثلث قائم‌الزاویه بوده و مرکز دایره همان وسط وتر است.

از طرفی می‌دانیم کوتاه‌ترین وتر گذرنده از **M** وتری است که در نقطه **M** بر قطر دایره عمود باشد.



$$W = \frac{B+C}{2} = \left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{1+1}{2} \right) = (0, 1)$$

$$M(1, 1) \Rightarrow WM = \sqrt{2}$$

$$R = \frac{1}{2} \text{ قطر} = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$MB' = \sqrt{WB'^2 - WM^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2} \quad A'B' = 2MB' = 2\sqrt{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: ابتدا خواسته مسئله را می‌نویسیم:

$$\frac{S_{AHDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{DH \times AH}{\frac{1}{2} \times AC \times AB}$$

گام دوم: حال در مثلث **ABC** چون $DH \parallel AB$ ، طبق قضیه تالس و تعمیم آن داریم:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{CH}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow AH = 3m, CH = m \Rightarrow AC = AH + CH = 4m$$

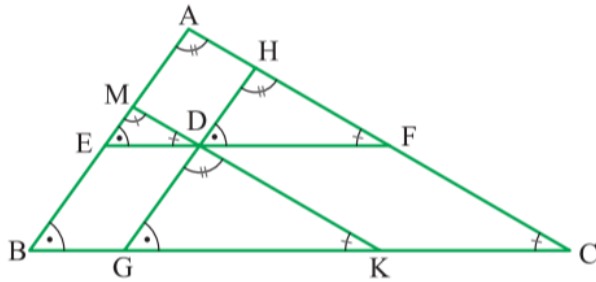
$$\frac{CD}{BC} = \frac{DH}{AB} = \frac{1}{4} \Rightarrow AB = 4k, DH = k$$

گام سوم: حال طبق گام اول داریم:

$$\frac{S_{AHDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{k \times 3m}{\frac{1}{2} \times 4m \times 4k} = \frac{3}{8}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: با توجه به قضیه خطوط موازی و مورب می توان نتیجه گرفت که زوایای مثلث های MED ، DHF و GDK با زوایای مثلث ABC برابرند؛ پس این ۳ مثلث با مثلث ABC متشابه هستند:



گام دوم: حال با نوشتن نسبت تشابه ها داریم:

$$\frac{ED}{BC} = \frac{MD}{AC} = \frac{ME}{AB} \Rightarrow \frac{DE}{12} = \frac{MD}{8} = \frac{ME}{6} = \frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow ED = 6m, MD = 4m, ME = 3m$$

و $BEDG$ متوازی الاضلاع $\Rightarrow GB = ED = 6m$

$$DH = 3t, HF = 4t, CK = DF = 6t$$

$$KD = 4n, GK = 6n, GD = 3n$$

گام چهارم: حال با توجه به رابطه های به دست آمده می توان نوشت: (*)

$$EF = GH = MK \Rightarrow 6(m+t) = 3(n+t) = 4(m+n)$$

گام پنجم: طبق فرض داریم:

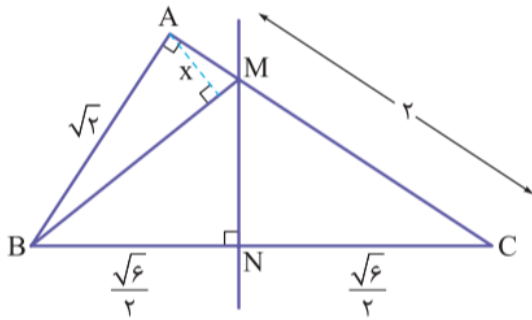
$$\Rightarrow \frac{m+t}{2} = \frac{n+t}{4} = \frac{m+n}{3} = \frac{m+t+n+t+m+n}{2+4+3} = \frac{2(m+n+t)}{9}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{m+t}{2} = \frac{n+t}{4} = \frac{m+n}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow m+t = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow EF = 6(m+t) = 6 \times \frac{8}{9} = \frac{16}{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: به کمک فیثاغورس $BC = \sqrt{6}$. حال شکل مقابل را در نظر بگیرید:



گام دوم: با توجه به شکل $\triangle NMC \sim \triangle ABC$ (زاویه $\hat{C}$ مشترک)، در نتیجه:

$$\frac{MC}{BC} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow \frac{MC}{\sqrt{6}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} \Rightarrow MC = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow AM = AC - MC = \frac{1}{2}$$

گام سوم: حال در مثلث ABM داریم:

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 \Rightarrow BM^2 = (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow BM = \frac{3}{2}$$

$$x \times BM = AM \times AB \Rightarrow x \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: نسبت‌های تشابه را در حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم:

$$\frac{2x}{2} = \frac{y}{x} = \frac{3}{3} \Rightarrow k = 1 \quad \text{همنهشت} \quad \times$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{3}{x} \Rightarrow k = \sqrt{3} \Rightarrow k^2 = 3$$

$$\frac{2x}{3} = \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{3}{2} \Rightarrow k^2 = \frac{9}{4}$$

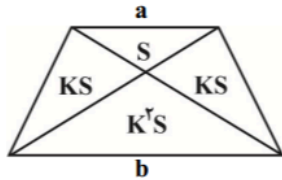
$$\frac{2x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{3}{x} \Rightarrow k = \sqrt{2} \Rightarrow k^2 = 2$$

گام دوم: با توجه به گزینه‌ها فقط گزینه (۴) نمی‌تواند نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به کوچک‌تر باشد.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

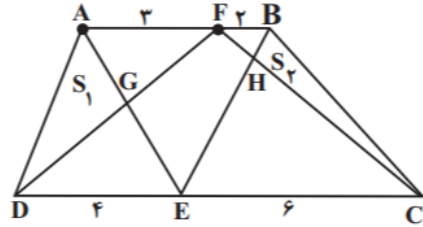
۸۲

در یک ذوزنقه اگر نسبت قاعده بزرگ به قاعده کوچک $K = \frac{b}{a}$ باشد برای مساحت آن داریم:



$$BFEC \text{ ذوزنقه } : K = \frac{6}{2} = 3 \quad KS = 18 \Rightarrow S = 6 \quad S_{BFH} = S = 6 \quad S_{BHC} = S_{FEH} = KS = 18$$

$$S_{EHC} = K'S = 9 \times 6 = 54$$



$$AFED \text{ ذوزنقه } : K' = \frac{4}{3} \quad K'S' = S_1 = 24 \Rightarrow \frac{4}{3}S' = 24 \Rightarrow S' = 18$$

$$S_{AFG} = S' = 18, S_{ADG} = S_{GFE} = K'S' = 24 \quad S_{DEG} = K'S' = \frac{16}{9} \times 18 = 32$$

$$S_{ABCD} = 54 + 18 + 18 + 6 + 32 + 24 + 24 + 18 = 194$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{x}{y} = \frac{7}{12}$$

$$DE \parallel GC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{x}{y+z} = \frac{4}{9} \Rightarrow y+z = \frac{9}{4}x$$

$$DE \parallel FC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{x}{3+y+z} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{x}{3+\frac{9}{4}x} = \frac{2}{7} \Rightarrow 7x = 6 + \frac{9}{2}x \Rightarrow \frac{5}{2}x = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ \frac{x}{y} = \frac{7}{12} \end{cases} \Rightarrow \frac{12}{5} = \frac{7}{12}y \Rightarrow y = \frac{144}{35}$$

$$y+z = \frac{9}{4}x \Rightarrow \frac{144}{35} + z = \frac{9}{4} \times \frac{12}{5} \Rightarrow z = \frac{27}{5} - \frac{144}{35} = \frac{189-144}{35} = \frac{45}{35} = \frac{9}{7}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

محل تلاقی قطرهای دایره، مختصات مرکز دایره را می‌دهند:

۸۳

$$\begin{cases} 2x + 2ay = 6 \\ x - ay = 1 \end{cases} \xrightarrow{x=2} \begin{cases} 2x + 2ay = 6 \\ -2x + 2ay = -2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{a}, x = 2 \xrightarrow{\text{مرکز دایره}} O(2, \frac{1}{a})$$

حالا می‌دانیم شیب خط مماس بر دایره قرینه و معکوس شیب خط گذرنده از نقاط A و O است.

$$O(2, \frac{1}{a}) \quad A(4, 4) \rightarrow m_{OA} = \frac{4 - \frac{1}{a}}{4 - 2} = \frac{4 - \frac{1}{a}}{2} \quad m_L = -\frac{2}{2} \xrightarrow{OA \perp L} \frac{4 - \frac{1}{a}}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow 4 - \frac{1}{a} = \frac{4}{2} \rightarrow \frac{8}{2} - \frac{1}{a} = \frac{4}{2} \rightarrow \frac{4}{2} = \frac{1}{a} \rightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۵

ابتدا مساحت‌ها را بر حسب a, b, c پیدا می‌کنیم.

$$S_{AA'B} = \frac{1}{2} \times b \times 2a = ab$$

$$S_{BFA} = \frac{1}{2} b(a-c) = \frac{b(a-c)}{2}$$

$$\frac{S_{AA'B}}{S_{BFA}} = \frac{ab}{\frac{b(a-c)}{2}} = \frac{2a}{a-c}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3c$$

$$\Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{2a}{a-c} = \frac{2a}{a-\frac{a}{3}} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3$$

چون:

(دپاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۶

رأس B مستطیل روی این دو ضلع قرار ندارد. پس این دو ضلع مجاورند و بنابراین برهم عمود هستند:

$$m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow 2 \times (-a) = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

حالا طول و عرض مستطیل برابر با فاصله B از این خط‌ها هستند:

$$B(2, -1) \left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ \frac{1}{2}x + y = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} m = \frac{|4-1+1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ n = \frac{|1-1-1|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}$$

پس:

$$S = mn = \frac{8}{5} = 1,6$$

(دپاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۷

با توجه به نتایج قضیه تالس، تناسب اضلاع را در شکل آورده‌ایم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{CAM} = \frac{1}{3} S_{ABC} \quad \text{تشابه: } S_{CON} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{CAM} = \frac{4}{9} S_{CAM}$$

$$\Rightarrow S_{OMAN} = \frac{5}{9} S_{CAM} = \frac{5}{9} \times \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{5}{27} S_{ABC}$$

پس سهم دوزنقه OMAN، $\frac{5}{27}$ کل مساحت است.

$$\text{تشابه: } S_{CPN} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{ABC} = \frac{4}{9} S_{ABC}, S_{AMN} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_{ABC} \Rightarrow S_{MNPB} = S_{ABC} - \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) S_{ABC} = \frac{4}{9} S_{ABC}$$

پس نسبت مساحت OMAN به MNPB می‌شود $\frac{5}{12}$ ، یعنی $\frac{5}{12} \times \frac{27}{4} = \frac{5}{4}$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۸

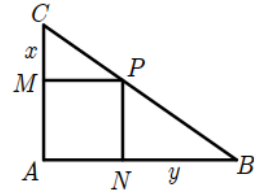
فرض می‌کنیم ضلع مربع برابر واحد باشد و $CM = x$ و $NB = y$. چون دو مثلث MCP و NPB متشابه می‌باشند، داریم:

$$\frac{NB}{MP} = \frac{PN}{CM} \Rightarrow \frac{y}{1} = \frac{1}{x} \Rightarrow xy = 1$$

از طرفی باتوجه به نسبت مساحت مثلث کوچک به مربع داریم:

$$\frac{S_{CMP}}{S_{AMPN}} = \frac{\frac{1}{2} \times x \times 1}{1 \times 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1$$

و چون نتیجه گرفتیم $xy = 1$ پس $y = 1$ و در نتیجه مساحت مثلث PNB برابر $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ می‌شود.



(دپاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۹

در دو مثلث BOA و EOA چون $MF \parallel OA$ و $ND \parallel OA$ دو تالس می‌نویسیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{MF}{OA} = \frac{FB}{AB} = \frac{1}{5} \\ \frac{DN}{OA} = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{DN}{FM} = \frac{5}{3}$$

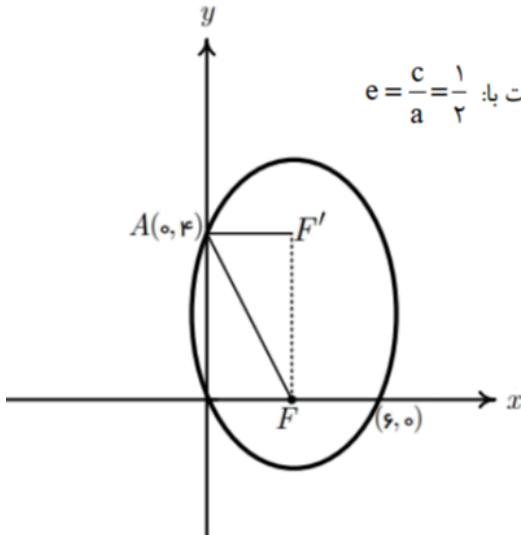
(دپاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۰

باتوجه به تقارن بیضی مختصات کانون F برابر $(3, 0)$ دست می‌آید. طول FF' برابر $2c$ است. پس $c = 2$.

از طرفی چون مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر $2a$ است

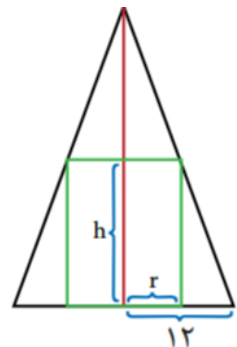
و چون $AF' + AF = 8$ در نتیجه $2a = 8$. حال که c و a را به دست آوردیم خروج از مرکز برابر است با: $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$



(دپاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

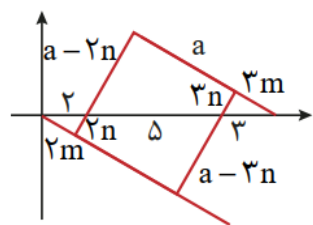
۹۱

ارتفاع مخروط را H فرض کنید.



$$\begin{aligned} \frac{H-h}{H} &= \frac{r}{12} \Rightarrow h = H - \frac{rH}{12} \\ S &= 2\pi rh = 2\pi r \left(H - \frac{rH}{12} \right) \\ &= 2\pi \left(H \cdot r - \frac{H}{12} r^2 \right) \\ S' &= 0 \Rightarrow H - \frac{H}{6} r = 0 \Rightarrow r = 6 \end{aligned}$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



$$\begin{aligned} \text{تشابه: } \frac{2n}{a-2n} &= \frac{3}{5} = \frac{3m}{a+3m} \Rightarrow \frac{n}{a-2n} = \frac{1}{5} = \frac{m}{a+3m} \\ \frac{2n}{a-2n} &= \frac{3}{5} = \frac{3m}{2m+a} \Rightarrow \frac{n}{a-2n} = \frac{1}{5} = \frac{m}{2m+a} \\ \frac{a-2n}{5} &= \frac{a-3n}{5} \Rightarrow a = 10n \\ m^2 + n^2 &= 1 \\ \frac{a+3m}{5} &= \frac{2m+a}{5} \Rightarrow a = 5m \\ \Rightarrow \frac{a^2}{25} + \frac{a^2}{100} &= 1 \Rightarrow 5a^2 = 100 \Rightarrow a^2 = 20 \end{aligned}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

طول ارتفاع AH در واقع فاصله رأس A تا ضلع BC است. ابتدا معادله ضلع BC را بدست می آوریم.

$$BC: y = x - 4$$

فاصله A تا ضلع BC: $\frac{|\Delta a - a + 4|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

$$4|a+1| = 8 \Rightarrow |a+1| = 2 \Rightarrow a = 1 \text{ or } a = -3$$

معادله ضلع BC: $y - x + 4 = 0$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$A(4, 4), C(1, 0), D(0, \alpha)$$

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 4 + 1 = x_B + 0 \Rightarrow x_B = 5$$

معادله اضلاع مستطیل را می نویسیم:

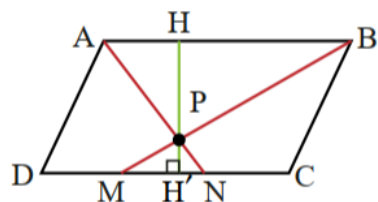
$$CD: y = m(x - 1) \Rightarrow AB: y = m(x - 4) + 4$$

$$BC: y = -\frac{1}{m}x + \frac{1}{m}$$

دو ضلع AB و BC را قطع می دهیم.

$$\begin{aligned} mx - 4m + 4 &= -\frac{1}{m}x + \frac{1}{m} \xrightarrow{x=5} 5m - 4m + 4 = \frac{-5}{m} + \frac{1}{m} \Rightarrow m + 4 = \frac{-4}{m} \\ m^2 + 4m + 4 &= 0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow AB: y = -2x + 12 \xrightarrow{\text{عرض از مبدا}}_{x=0} y = 12 \end{aligned}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



$$PMN \sim PAB$$

$$\begin{aligned} \frac{PH}{PH'} &= \frac{AB}{MN} = 3 \\ \Rightarrow \frac{PH + PH'}{PH'} &= \frac{3+1}{1} = 4 \Rightarrow \frac{HH'}{PH'} = 4 \end{aligned}$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{PMN}} = \frac{HH' \cdot AB}{\frac{1}{2} PH' \cdot MN} = 2 \frac{HH'}{PH'} \cdot \frac{AB}{MN}$$

$$\Rightarrow 2 \times 4 \times 3 = 24 \Rightarrow \frac{S_{PMN}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{24}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

در ابتدا دقت کنید دو مثلث MND و AMB متشابهند، پس:

$$\frac{MN}{AM} = \frac{DN}{AB} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{DN}{AB} \Rightarrow ND = \frac{1}{2} AB \Rightarrow NC = \frac{1}{2} AB$$

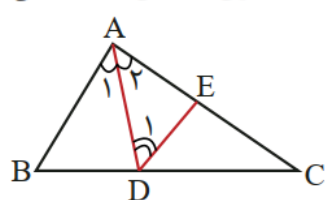
از طرفی در مثلث ABP طبق تالس داریم:

$$\frac{NC}{AB} = \frac{PN}{AP} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{PN}{PN+9} \Rightarrow PN + 9 = 2PN \Rightarrow PN = 9$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۹۷

چون AD نیمساز است، پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. از طرفی $DE \parallel AB$ ، پس $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$. لذا $\hat{A}_2 = \hat{D}_1$ ، پس مثلث ADE متساوی الساقین است. یعنی



$$\frac{CE}{AC} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{CE}{10} = \frac{AE}{6} \Rightarrow 3CE = 5AE$$

AE = ED و طبق تالس داریم:

$$AC = AE + CE \Rightarrow 10 = AE + \frac{5}{3}AE$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{8}{3}AE \Rightarrow AE = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۹۸

$$FF' = 6 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3, e = \frac{6}{10}$$

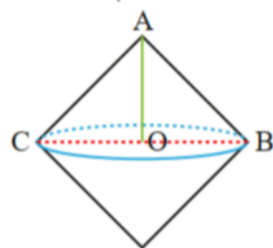
$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{6}{10} \Rightarrow a = 5, b = 4 \begin{cases} 2a = 10 \\ 2b = 8 \end{cases}$$

اختلاف دو قطر بیضی برابر ۲ است.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۹۹

اگر مربع را حول قطر آن دوران دهیم، در واقع ۲ مخروط بدست می آید که در قاعده به شعاع $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ به هم چسبیده اند و ارتفاع آن نیز $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ است؛ زیرا:



$$AB = a$$

$$OA = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$V = \frac{2\pi}{3} \times \frac{a^2}{2} \times \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}a^3$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{6}a^3 = \frac{16\pi}{3} \Rightarrow a^3 = \frac{32}{\sqrt{2}} = 16\sqrt{2} = 2^{4/5}$$

$$a = 2^{1/5} \Rightarrow \text{ضلع مربع} = a = 2\sqrt{2}$$

$$V = \pi a^3 = \pi \times \frac{32}{\sqrt{2}} = 16\pi\sqrt{2}$$

حال اگر حول ضلع دوران دهیم:

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۰

با توجه به آنکه مثلث قائم الزاویه است، پس:

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = b\sqrt{3}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{c^2}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۱

نکته: طول MN که همان وتر کانونی است، برابر $\frac{2b^2}{a}$ می باشد.

$$2b = 2MN = 2 \times \frac{2b^2}{a} \Rightarrow a = 2b$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

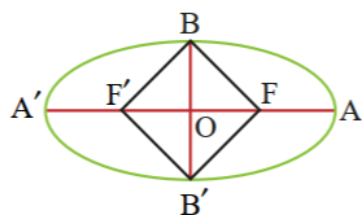
$$\begin{cases} OB = b \\ ON = OA = a \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow BN = c = \Delta$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\Delta}{a} \Rightarrow a = \lambda$$

۱۰۲

$$S = \pi R^2 = \pi a^2 = 64\pi$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



$$a^2 = b^2 + c^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}c$$

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

طبق شکل $b = c$ است، پس:

۱۰۳

مختصات نقاط را به دست می آوریم:

۱۰۴

$$O = \frac{F + F'}{2} = 3$$

$$\begin{cases} c = 4 \\ a = \Delta \end{cases} \Rightarrow b = 3 \Rightarrow \begin{cases} A(\lambda, 0) \\ B(3, 3) \\ B'(3, -3) \\ F'(-1, 0) \end{cases}$$

$$AB \text{ معادله: } y = -\frac{3}{\Delta}x + \frac{24}{\Delta}$$

$$B'F' \text{ معادله: } y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{\Delta}x + \frac{24}{\Delta} = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \Rightarrow -12x + 96 = -15x - 15 \Rightarrow x = -37$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

مرکز دایره نقطه $(2, 1)$ است، پس $a = -4$ و $b = -2$ می باشد.

۱۰۵

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 - 2y = c \Rightarrow O_1(2, 1), R_1 = \sqrt{c+5} \\ (x+2)^2 + (y-4)^2 = 9 \Rightarrow O_2(-2, 4), R_2 = 3 \end{cases}$$

$$R_1 + R_2 = O_1O_2 \Rightarrow 3 + \sqrt{c+5} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{c+5} = 2 \Rightarrow c = -1$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

دایره‌ها را به صورت زیر مرتب می‌کنیم: ۱۰۶

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = k^2 + 5$$

$$(x-2)^2 + y^2 = k^2$$

شعاع اولی برابر $\sqrt{k^2 + 5}$ و شعاع دومی برابر k است.

طول خط‌المركزین برابر است با:

$$d = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-0)^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{k^2 + 5} \pm k = 5 \Rightarrow \sqrt{k^2 + 5} = 5 \pm k$$

$$k^2 + 5 = k^2 + 25 \pm 10k \xrightarrow{k>0} k = 2$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

دایره را به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر بگیرید: ۱۰۷

دو معادله اول را جمع می‌کنیم.

$$\begin{cases} (0, 4) \Rightarrow 16 + 4b + c = 0 \\ (0, -4) \Rightarrow 16 - 4b + c = 0 \\ (2, 0) \Rightarrow 4 + 2a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 22 + 2c = 0 \Rightarrow c = -11 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = 6 \\ x^2 + y^2 + 6x - 11 = 0 \Rightarrow x^2 + 9x^2 + 6x - 11 = 0 \Rightarrow 10x^2 + 6x - 11 = 0 \Rightarrow x = 1, -\frac{1}{5} \\ y = 3x \end{cases}$$

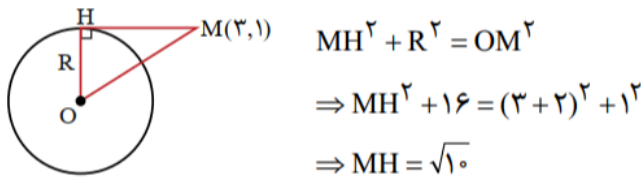
(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

نقطه $C(x, y)$ را روی دایره در نظر بگیرید: ۱۰۸

$$CA = \sqrt{2}CB \Rightarrow C^2A = 2C^2B \Rightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 2(x^2 + (y-2)^2)$$

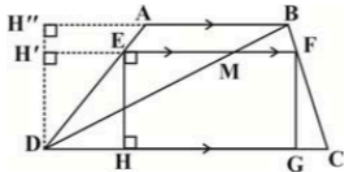
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x = 12 \Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = 16$$

مرکز دایره $O(-2, 0)$ و شعاع دایره $R = 4$ است.



(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

ابتدا قطر BD دوزنقه را رسم می‌کنیم تا EF را در نقطه M قطع کند. ۱۰۹



$$\frac{AE}{ED} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{DE}{AE} = \frac{2}{1} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{DE}{DA} = \frac{2}{3}$$

دو مثلث DEM و DAB متشابهند و نسبت تشابه آنها $\frac{2}{3}$ است. بنابراین:

$$EH = DH' = \frac{2}{3}DH'' \quad (1) \quad , EM = \frac{2}{3}AB \quad (2) \quad \frac{BF}{FC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BF}{BC} = \frac{1}{3}$$

$$MF = \frac{1}{3}DC \xrightarrow{DC=2AB} MF = \frac{2AB}{3} \quad (3)$$

دو مثلث BMF و BDC با نسبت $\frac{1}{3}$ متشابهند. بنابراین:

$$EF = EM + MF \xrightarrow{(2), (3)} EF = \frac{4AB}{3} \quad (4)$$

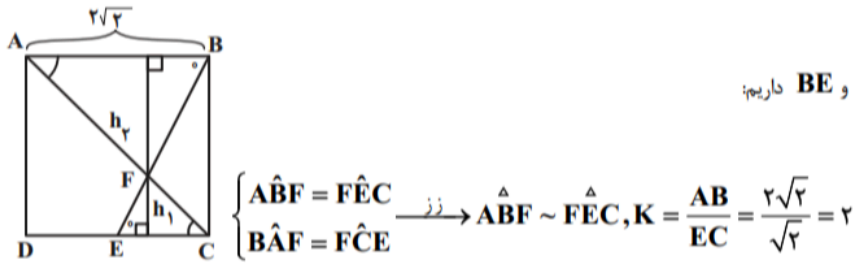
$$\frac{S_{\text{مستطیل}}}{S_{\text{دوزنقه}}} = \frac{EH \cdot EF}{\left(\frac{AB+DC}{2}\right)DH''} = \frac{EH}{DH''} \cdot \frac{EF}{\frac{2}{3}AB} \xrightarrow{(1), (4)} \frac{S_{\text{مستطیل}}}{S_{\text{دوزنقه}}} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{27}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱۰

واضح است که $\triangle FEC$ ، کوچک‌ترین مثلث به‌وجود آمده است.

با توجه به موازی بودن خطوط AB و CD و همچنین مورب بودن AC و BE داریم:



نسبت تشابه برابر با ۲ است. برای ارتفاع‌ها داریم:

$$h_1 + h_2 = 2\sqrt{2} \xrightarrow{\frac{h_2}{h_1} = 2} h_1 + 2h_1 = 2\sqrt{2} \Rightarrow h_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$S_{\triangle FEC} = \frac{1}{2} \times EC \times h_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3}$$

بنابراین مساحت $\triangle FEC$ برابر است با:

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱۱

از تشابه OAB و OCD داریم: (با فرض اینکه ارتفاع وارد از رأس E بر قاعده DC باشد.)

$$\frac{2}{h} = \frac{5}{12} \Rightarrow h = \frac{24}{5} \quad (\text{ارتفاع وارد بر } CD \text{ در مثلث } OCD)$$

$$\frac{24}{5} \times \frac{12}{17} = \frac{24 \times 12}{17} = \frac{432}{17}$$

از طرف دیگر: $EF = \frac{2AB \cdot DC}{AB + DC} = \frac{120}{17}$ و مساحت مثلث EFM برابر است با:

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱۲

نکته: مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

نکته: اگر در یک بیضی، اندازه نیم‌قطر بزرگ را a ، اندازه نیم‌قطر کوچک را b و نصف فاصله کانونی بیضی را c بنامیم، آنگاه: $a^2 = b^2 + c^2$

با توجه به شکل، نقطه M روی دایره است و زاویه $\hat{F'MF}$ ، روبه‌روی قطر FF' است.

پس $\hat{F'MF} = 90^\circ$ و مثلث MFF' در رأس M قائم‌الزاویه است. بنابراین:

$$S_{\triangle MFF'} = \frac{1}{2} \times MF \times MF' \quad (1)$$

اکنون با فرض $MF = x$ داریم:

$$M \text{ روی بیضی است.} \Rightarrow MF + MF' = 2a \Rightarrow MF' = 2a - x \quad (2)$$

$$\triangle MFF': (MF)^2 + (MF')^2 = (FF')^2 \xrightarrow{FF'=2c} x^2 + (2a-x)^2 = (2c)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 4a^2 - 4ax + x^2 = 4c^2 \Rightarrow 2x^2 - 4ax = 4c^2 - 4a^2 \xrightarrow{\div 4} \frac{1}{2}x^2 - ax = c^2 - a^2 \quad (3)$$

با توجه به رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ و اندازه قطر کوچک بیضی داریم:

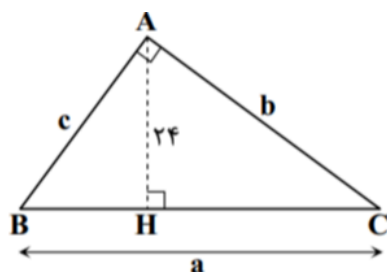
$$b^2 = a^2 - c^2, \quad 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a^2 - c^2 = 9 \quad (4)$$

بنابراین:

$$\begin{cases} (1), (2) \Rightarrow S_{\triangle MFF'} = \frac{1}{2}(x)(2a-x) = ax - \frac{1}{2}x^2 \\ (3), (4) \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - ax = -9 \Rightarrow ax - \frac{1}{2}x^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle MFF'} = 9$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۱۳



مثلث قائم الزاویه ABC را رسم کرده و طول اضلاع آن را $BC = a$ ، $AB = c$ و $AC = b$ در نظر می‌گیریم. همچنین طول AH برابر ۲۴ است. مطابق روابط طولی در مثلث قائم الزاویه داریم:

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow 24 \times a = b \times c \quad (۱)$$

همچنین محیط مثلث ABC برابر ۱۲۰ است؛ یعنی $a + b + c = 120$. سعی می‌کنیم با ایجاد bc در این معادله، از رابطه (۱) استفاده کنیم:

$$a + b + c = 120 \Rightarrow b + c = 120 - a \Rightarrow (b + c)^2 = (120 - a)^2 \Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 120^2 + a^2 - 2 \times 120 \cdot a$$

$$\xrightarrow{(۱)} b^2 + c^2 + 2 \times (24a) = 120^2 + a^2 - 240 \cdot a$$

طبق قضیه فیثاغورس، می‌دانیم $b^2 + c^2 = a^2$ ، پس:

$$\Rightarrow a^2 + 48a = 120^2 + a^2 - 240 \cdot a \Rightarrow 288a = 120^2 \Rightarrow a = \frac{120 \times 120}{2 \times 12 \times 12} \Rightarrow a = 50 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{24 \times 50}{2} = 600$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

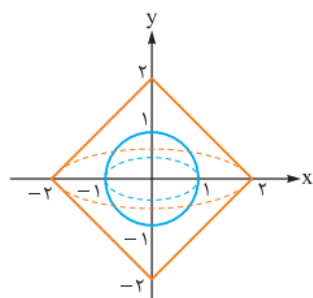
۱۱۴

گام اول: دایره با معادله $x^2 + y^2 = 1$ ، دارای مرکز $O(0,0)$ و شعاع ۱ است و همچنین در معادله داده شده برای مربع، اگر

مقادیر زیر را به جای X و Y جای گذاری کنیم، رئوس مربع به دست می‌آید:

$$|x| + |y| = 2 \xrightarrow{x=0} |y| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x=0, y=2 \\ x=0, y=-2 \end{cases}$$

$$|x| + |y| = 2 \xrightarrow{y=0} |x| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x=2, y=0 \\ x=-2, y=0 \end{cases}$$



گام دوم: دایره و مربع را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

گام سوم: اگر سطح محدود به دایره و مربع را حول محور Y ها دوران دهیم، حجم ایجاد شده شامل دو مخروط به هم چسبیده به شعاع و ارتفاع ۲ است که به اندازه حجم یک کره به شعاع ۱ توخالی است، پس حجم ایجاد شده برابر می‌شود با:

$$V_{\text{ایجاد شده}} = V_{\text{دو مخروط}} - V_{\text{کره}} \xrightarrow{V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h, V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi r^3} V_{\text{ایجاد شده}} = 2\left(\frac{1}{3}\pi(2)^2(2)\right) - \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{16\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} = 4\pi$$

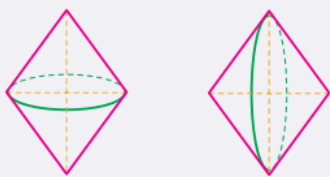
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا فرض می‌کنیم که طول قطر بزرگ‌تر لوزی $2n$ و طول قطر کوچک‌تر آن $2m$ است. پس:

$$2m < 2n \Rightarrow m < n$$

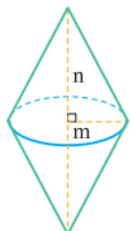
نکته

حجم هندسی حاصل از دوران یک لوزی حول قطرهایش، دو مخروط به هم چسبیده است.



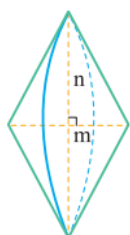
گام دوم: اگر لوزی را حول قطر بزرگ‌تر دوران دهیم، شعاع مخروط‌های ایجادشده برابر m و ارتفاع آن‌ها برابر n است، بنابراین حجم شکل فضایی حاصل از این دوران برابر است با:

$$V_{\text{شکل حاصل}} = 2\left(\frac{1}{3}\pi(m)^2(n)\right) = \frac{2}{3}\pi m^2 n \quad (۱)$$



گام سوم: اگر لوزی را حول قطر کوچک آن دوران دهیم، شعاع مخروط‌ها برابر n و ارتفاع آن‌ها برابر m خواهد شد، پس:

$$V_{\text{شکل حاصل}} = 2\left(\frac{1}{3}\pi(n)^2(m)\right) = \frac{2}{3}\pi n^2 m \quad (۲)$$



گام چهارم: همه گزینه‌ها بین صفر و یک هستند. از طرف دیگر $m < n$ است، پس خواسته سؤال نسبت (۱) به (۲) است و داریم:

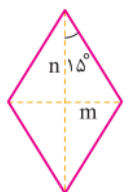
$$\text{خواسته سؤال} \xrightarrow{(۱), (۲)} \frac{\frac{2}{3}\pi m^2 n}{\frac{2}{3}\pi n^2 m} = \frac{m}{n}$$

نکته

یکی از اتحادهای مثلثاتی به صورت مقابل است:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

گام پنجم: در گام اول، قطرهای بزرگ و کوچک لوزی را $2n$ و $2m$ در نظر گرفتیم، همچنین یکی از زاویه‌های لوزی 30° است، قطر لوزی نیمساز است، با توجه به شکل واضح است که $\frac{m}{n} = \tan 15^\circ$.



$$\sin 30^\circ = \frac{2 \tan 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2 \tan 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ} \Rightarrow 1 + \tan^2 15^\circ = 4 \tan 15^\circ$$

$$\xrightarrow{\tan 15^\circ = t} 1 + t^2 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \xrightarrow[\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}]{\Delta = 12} t = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\xrightarrow{t = \tan 15^\circ < 1} \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

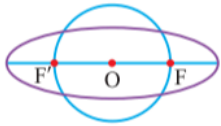
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته فاصله هر کانون بیضی از هر رأس ناکانونی برابر است با a و یا نصف قطر بزرگ.

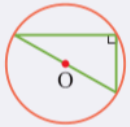
پاسخ تشریحی **گام اول:** فاصله هر کانون بیضی از رأس ناکانونی ۱۳ است، پس $a = ۱۳$ و طول قطر کوچک ۱۰ است؛ در نتیجه $b = ۵$ ، حالا c

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{169 - 25} \Rightarrow c = 12$$

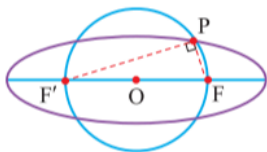
را به دست می آوریم:



گام دوم: با توجه به صورت سؤال، مرکز دایره همان مرکز بیضی است و شعاع آن ۱۲ است، در گام قبلی دیدیم که c یا همان فاصله مرکز تا کانون ها برابر ۱۲ شد، پس دایره از کانون های بیضی می گذرد. حالا شکل مناسب را رسم می کنیم.



نکته زاویه محاطی روبه رو به قطر در دایره برابر 90° است.

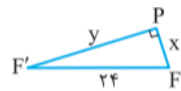


گام سوم: زاویه محاطی P روبه رو به قطر است، پس $\hat{P} = 90^\circ$ ، حالا فاصله نقطه P (محل تقاطع دایره و بیضی) تا کانون F را x و فاصله آن تا F' را y در نظر می گیریم.

$$PF + PF' = 2a \Rightarrow x + y = 26 \quad (1)$$

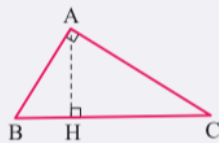
گام چهارم: در مثلث قائم الزاویه PPF' داریم:

$$x^2 + y^2 = 24^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 576 \quad (2)$$



گام پنجم: با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \xrightarrow{x+y=26, x^2+y^2=576} 26^2 = 576 + 2xy \Rightarrow 676 = 576 + 2xy \Rightarrow xy = 50$$

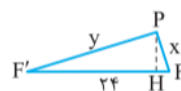


نکته در مثلث قائم الزاویه ABC ، اگر ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، خواهیم داشت:

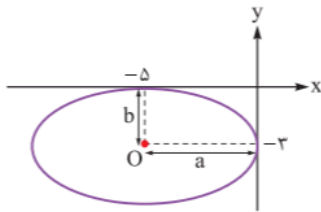
$$AH \times BC = AB \times AC$$

گام ششم: خواسته سؤال فاصله P تا محور کانونی بیضی یا همان PH است. در نتیجه:

$$PH \times FF' = xy \Rightarrow PH \times 24 = 50 \Rightarrow PH = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}$$

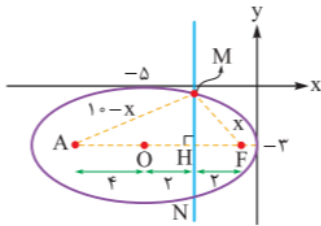


(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



گام اول: ابتدا شکل مناسب مسئله را رسم می‌کنیم؛ مرکز بیضی $O(-5, -3)$ و بیضی بر محورهای مختصات مماس است، پس $a=5$ و $b=3$ و در نتیجه:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = \sqrt{25 - 9} \Rightarrow c = 4$$



گام دوم: c برابر ۴ شد، پس مختصات دو کانون بیضی به صورت $F(-1, -3)$ و $F'(-9, -3)$ است. مطابق شکل دورترین کانون از مبدأ مختصات F' است؛ پس F' همان A است، خط $x = -3$ بیضی را در M و N قطع می‌کند، محل برخورد خط $x = -3$ با قطر بزرگ بیضی را H می‌نامیم، فاصله M از F را x در نظر می‌گیریم و با توجه به فاصله M از دو کانون داریم:

$$MF + MA = 2a \Rightarrow x + MA = 10 \Rightarrow MA = 10 - x$$

گام سوم: با توجه به شکل رسم‌شده در گام قبلی، خط $x = -3$ دو واحد از مرکز فاصله دارد، پس $AH = 6$ و $HF = 2$ ، حال در دو مثلث قائم‌الزاویه AMH و MHF داریم:

$$\Delta AMH: MH^2 = AM^2 - AH^2 \Rightarrow MH^2 = (10 - x)^2 - 36 \quad (1)$$

$$\Delta MHF: MH^2 = MF^2 - FH^2 \Rightarrow MH^2 = x^2 - 4 \quad (2)$$

حال (۱) و (۲) را با یکدیگر برابر قرار می‌دهیم تا x را به دست آوریم:

$$(10 - x)^2 - 36 = x^2 - 4 \Rightarrow 100 - 20x + x^2 - 36 = x^2 - 4 \Rightarrow 20x = 68 \Rightarrow x = \frac{68}{20} = \frac{17}{5}$$

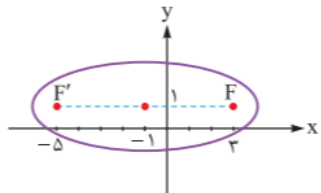
گام چهارم: $x = \frac{17}{5}$ را در (۲) جای‌گذاری می‌کنیم تا MH به دست آید:

$$MH^2 = x^2 - 4 \Rightarrow MH^2 = \left(\frac{17}{5}\right)^2 - 4 \Rightarrow MH^2 = \frac{189}{25} \Rightarrow MH = \frac{3\sqrt{21}}{5}$$

گام پنجم: M و N دارای طول برابر هستند، پس $NH = MH = \frac{3\sqrt{21}}{5}$ ، در نتیجه $MN = 2 \times \frac{3\sqrt{21}}{5} = \frac{6}{5}\sqrt{21}$ ، خواسته سؤال، مساحت مثلث AMN است که قاعده‌اش همان MN و ارتفاعش AH است، پس:

$$S_{\Delta AMN} = \frac{AH \times MN}{2} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{6 \times \frac{6}{5}\sqrt{21}}{2} = \frac{36}{10}\sqrt{21} = \frac{18}{5}\sqrt{21}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



گام اول: ابتدا شکل مناسب مسئله را رسم می‌کنیم:

طول FF' برابر ۸ است، ابتدا c را به دست می‌آوریم:

$$FF' = 2c \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow c = 4$$

گام دوم: طبق صورت سؤال $2a = 10$ ، پس $a = 5$. حال به کمک رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ در بیضی، b را به دست می‌آوریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

گام سوم: b همان نصف قطر کوچک است که برابر ۳ است، پس طبق فرض، فاصله M از F روی بیضی، برابر ۳ است. حال در بیضی داریم:

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow 3 + MF' = 10 \Rightarrow MF' = 7$$

نکته معادله استاندارد دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع R برابر است با:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

گام چهارم: نقطه M محل تلاقی دایره‌هایی به مرکز F و F' به ترتیب با شعاع‌های ۳ و ۷ است. داریم:

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9 \\ (x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 49 \end{cases} \Rightarrow (x + 5)^2 - (x - 3)^2 = 49 - 9 \Rightarrow 10x + 25 + 6x - 9 = 40 \Rightarrow 16x = 24 \Rightarrow x_M = \frac{3}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: مرکز دایره اول روی خط $x - y + 3 = 0$ قرار دارد؛ پس اگر طول مرکز را α در نظر بگیریم، عرض آن $\alpha + 3$ خواهد شد، پس مختصات مرکز به صورت $O_1(\alpha, \alpha + 3)$ است.

نکته در معادله گسترده دایره به صورت $x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0$ (ضرایب x^2 و y^2 باید برابر یک باشد)، مختصات مرکز و شعاع

$$O = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

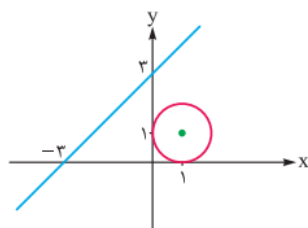
از رابطه‌های مقابل به دست می‌آید:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$$

گام دوم: مرکز دایره و شعاع دایره دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C} \rightarrow R_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 - 4(1)} = 1 \\ O = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \rightarrow O_2 = \left(-\frac{(-2)}{2}, -\frac{(-2)}{2}\right) = (1, 1) \end{array} \right.$$

شکل صورت سؤال به صورت مقابل است:



گام سوم: دو دایره با یکدیگر مماس خارج‌اند، پس $R_1 + R_2 = O_1O_2$ ، پس:

$$R_1 + R_2 = O_1O_2 \xrightarrow[\text{طبق گام دوم } R_2=1]{\text{طبق صورت سؤال } R_1=2} 2 + 1 = O_1O_2 \Rightarrow O_1O_2 = 3$$

گام چهارم: در گام اول دیدیم که مختصات O_1 به صورت $(\alpha, \alpha + 3)$ است و با توجه به گام دوم، مختصات O_2 برابر $(1, 1)$ است، حال O_1O_2 را بر حسب α می‌نویسیم و آن را برابر ۳ قرار می‌دهیم:

$$O_1O_2 = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\alpha + 3 - 1)^2} \xrightarrow{O_1O_2=3} \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\alpha + 2)^2} = 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} (\alpha - 1)^2 + (\alpha + 2)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \alpha^2 + 4\alpha + 4 = 9 \Rightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Rightarrow (\alpha + 2)(\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

گام پنجم: حال به سراغ خواسته سؤال می‌رویم و فاصله مرکز دایره اول با مبدأ مختصات را یکبار با $\alpha = -2$ و یکبار با $\alpha = 1$ به دست می‌آوریم:

$$\alpha = -2 \xrightarrow{O_1(\alpha, \alpha+3)} O_1(-2, 1) \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

$$\alpha = 1 \xrightarrow{O_1(\alpha, \alpha+3)} O_1(1, 4) \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{(1-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{17}$$

پس بیشترین فاصله مرکز دایره اول تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{17}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: با توجه به صورت سؤال، $2a$ (طول قطر بزرگ)، $2c$ (فاصله کانون‌ها) و $2b$ (فاصله رئوس غیرکانونی)، دنباله هندسی تشکیل می‌دهند. دقت کنید که $b < c < a$. حال با توجه به قوانین مربوط به واسطه هندسی خواهیم داشت:

$$2b, 2c, 2a \xrightarrow{\text{واسطه هندسی}} (2c)^2 = (2a)(2b) \Rightarrow 4c^2 = 4ab \Rightarrow c^2 = ab \quad (1)$$

گام دوم: رابطه مقابل برای a ، b و c در بیضی همواره برقرار است:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (2)$$

گام سوم: (۱) را در (۲) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a^2 = b^2 + ab \xrightarrow{\div a^2} 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a}$$

نکته خروج از مرکز بیضی به وسیله یکی از روابط زیر به دست می‌آید:

$$e = \frac{c}{a} \quad e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

گام چهارم: در رابطه به دست آمده در گام سوم، $\frac{b}{a}$ را برابر t در نظر می‌گیریم:

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} \xrightarrow{\frac{b}{a}=t} 1 = t^2 + t \Rightarrow t^2 + t - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 1 - 4(1)(-1) = 5} t_1, t_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{t = \frac{b}{a} > 0} t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

گام پنجم: با توجه به این که $\frac{b}{a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ، خروج از مرکز بیضی را محاسبه می‌کنیم:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \Rightarrow e = \sqrt{1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{-2 + 2\sqrt{5}}{4}} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \xrightarrow{\text{مجذور}} e^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: ابتدا دو طرف معادله داده شده را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 و y^2 برابر ۱ شود:

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + by + b = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 - 3x + \frac{b}{2}y + \frac{b}{2} = 0$$

نکته با جای‌گذاری مختصات هر نقطه در سمت چپ معادله گسترده دایره به صورت $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ، موقعیت آن

نقطه (درون، بیرون و روی دایره) را نسبت به دایره معلوم می‌کنیم:

$f(M) > 0 \Rightarrow M$ بیرون دایره

$f(M) = 0 \Rightarrow M$ روی دایره

$f(M) < 0 \Rightarrow M$ درون دایره

گام دوم: نقطه $A(1, 3)$ ، بیرون دایره است، پس:

$$f(A) > 0 \Rightarrow (1)^2 + (3)^2 - 3(1) + \frac{b}{2}(3) + \frac{b}{2} > 0 \Rightarrow 7 + 2b > 0 \Rightarrow b > -\frac{7}{2}$$

نکته با توجه به این‌که در معادله گسترده دایره، شعاع از رابطه $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ به دست می‌آید، معادله

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در صورتی معادله یک دایره است که:

$$a^2 + b^2 - 4c > 0$$

گام سوم: معادله $x^2 + y^2 - 3x + \frac{b}{2}y + \frac{b}{2} = 0$ ، معادله یک دایره است، پس شرط زیر باید برقرار باشد:

$$(-3)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{b}{2}\right) > 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{4}b^2 - 2b + 9}_{\Delta < 0} > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است.}$$

> 0 ضریب b^2

گام چهارم: با توجه به گام دوم، مینیمم مقدار صحیح b ، برابر -3 است، حالا معادله دایره را بازنویسی می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 3x - \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0$$

گام پنجم: حال به کمک رابطه $r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ ، شعاع را به دست می‌آوریم و سپس خواسته سؤال که مساحت دایره است را محاسبه می‌کنیم:

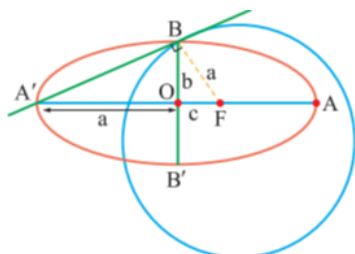
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{69}{4}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{69}{16}}$$

گام ششم: حال به سراغ خواسته سؤال می‌رویم:

پس مساحت دایره ۶۹ برابر $\frac{\pi}{16}$ است.

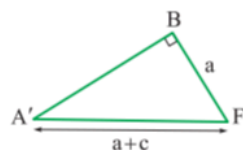
$$S = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi \left(\sqrt{\frac{69}{16}}\right)^2 = \frac{69}{16}\pi$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



گام اول: ابتدا شکل مناسب مسئله را رسم می‌کنیم، توجه کنید که فاصله F تا B برابر با نصف قطر بزرگ یا همان a است و همچنین شعاع BF بر خط گذرنده از $A'B$ عمود است.

گام دوم: در شکل گام اول، مثلث قائم‌الزاویه $A'BF$ را در نظر می‌گیریم و رابطه فیثاغورس را برای آن می‌نویسیم:



$$\begin{aligned} A'F^2 &= A'B^2 + BF^2 \Rightarrow (a+c)^2 = a^2 + c^2 \\ \Rightarrow a^2 + 2ac + c^2 &= a^2 + c^2 \Rightarrow A'B^2 = c^2 + 2ac \quad (1) \end{aligned}$$

گام سوم: در این جا مثلث قائم‌الزاویه $A'BO$ را در نظر می‌گیریم:



$$A'B^2 = A'O^2 + OB^2 \Rightarrow A'B^2 = a^2 + b^2 \xrightarrow{\text{دربیزی}} \frac{b^2 = a^2 - c^2}{b^2 = a^2 - c^2} \Rightarrow A'B^2 = 2a^2 - c^2 \quad (2)$$

گام چهارم: سمت راست تساوی‌های (۱) و (۲) را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم:

$$(1), (2) \Rightarrow c^2 + 2ac = 2a^2 - c^2 \Rightarrow 2a^2 - 2c^2 - 2ac = 0 \xrightarrow{\div 2} a^2 - c^2 - ac = 0 \xrightarrow{\div a^2} 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 - \frac{c}{a} = 0$$

گام پنجم: خروج از مرکز e برابر است با $\frac{c}{a}$ ، در معادله به دست آمده در گام قبلی قرار می‌دهیم $\frac{c}{a} = e$:

$$1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 - \frac{c}{a} = 0 \xrightarrow{\frac{c}{a} = e} 1 - e^2 - e = 0 \Rightarrow e^2 + e - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 5} e_1, e_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{e > 0} e = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$a - 2 = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

گام اول: در معادله گسترده دایره، ضرایب x^2 و y^2 باید برابر باشند؛ پس:

$$\xrightarrow{a=4} 4x^2 + 4y^2 - 2bx + b^2y + c = 0$$

معادله داده شده را بازنویسی می‌کنیم:

نکته در معادله گسترده دایره اگر نسبت به x مشتق بگیریم و آن را برابر صفر قرار دهیم، طول مرکز به دست می‌آید و اگر نسبت به y مشتق بگیریم و آن را برابر صفر قرار دهیم، عرض مرکز به دست می‌آید.

$$4x - 2b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{2} \quad (\text{طول مرکز})$$

گام دوم: مختصات مرکز را به دست می‌آوریم:

$$4y + b^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-b^2}{4} \quad (\text{عرض مرکز})$$

گام سوم: قطر دایره نیمساز ناحیه اول و سوم است، مرکز دایره بر روی قطر قرار دارد، پس طول و عرض مرکز با یکدیگر برابرند، آن‌ها را مساوی هم می‌گذاریم:

$$\frac{b}{2} = \frac{-b^2}{4} \Rightarrow -2b^2 = 4b \Rightarrow b^2 + 2b = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -2 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

اگر $b = 0$ باشد، مرکز دایره مبدأ مختصات می‌شود، پس $b = -2$.

گام چهارم: در صورت سؤال گفته شده است که قطر دایره در نقاط A و B دایره را قطع کرده است و $AB = 6$ ، پس قطر دایره برابر ۶ است و شعاع آن برابر ۳ است.

گام پنجم: معادله دایره را با توجه به a و b به دست آمده بازنویسی می‌کنیم و طرفین رابطه را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا از رابطه

$$2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + c = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2x + 2y + \frac{c}{2} = 0 \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C} \quad \text{استفاده کنیم:}$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(2)^2 + (2)^2 - 4(\frac{c}{2})} \xrightarrow[r=3]{\text{طبق گام قبلی}} 3 = \frac{1}{2} \sqrt{8 - 2c} \Rightarrow \sqrt{8 - 2c} = 6 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 8 - 2c = 36 \Rightarrow c = -14$$

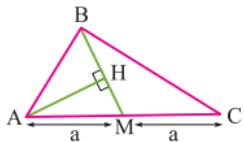
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

نکته فاصله نقطه $M(x_0, y_0)$ از خط $Ax + By + C = 0$ از رابطه مقابل به دست می‌آید:

گام ششم: خط $ax + by + c = 0$ با توجه به مقادیر به دست آمده به صورت $4x - 2y - 14 = 0$ است. فاصله آن تا مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|4(0) - 2(0) - 14|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{14}{\sqrt{20}} = \frac{14}{2\sqrt{5}} \Rightarrow d = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 1/4\sqrt{5} \quad \text{پس فاصله مبدأ تا خط } 1/4 \text{ برابر } \sqrt{5} \text{ است.}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



گام اول: ابتدا شکل مناسب را رسم می‌کنیم، اگر AC را برابر $2a$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

گام دوم: AH بر BM عمود و نیمساز زاویه $\hat{A}$ است، پس دو مثلث ABH و AMH متشابه‌اند، در نتیجه:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BH}{MH} = \frac{AH}{AH} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = 1 \Rightarrow AB = a$$

گام سوم: طول اضلاع AB و AC به ترتیب برابر a و $2a$ می‌باشد (دقت کنید که طول ضلع سوم را نمی‌دانیم)، طبق صورت سؤال، طول اضلاع

سه عدد طبیعی متوالی هستند پس با توجه به اندازه‌های AB و AC ، اندازه اضلاع یا برابر ۱، ۲، ۳ است و یا برابر ۲، ۳، ۴.

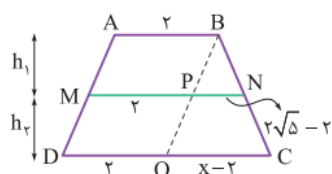
گام چهارم: با توجه به قانون نابرابری اضلاع مثلث، ۱، ۲، ۳ نمی‌تواند طول اضلاع یک مثلث باشد، پس اضلاع مثلث ABC برابر ۲، ۳، ۴ است

$$ABC \text{ محیط مثلث } = 2 + 3 + 4 = 9$$

که محیط آن برابر می‌شود با:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: ابتدا خطی موازی AD از رأس B رسم می‌کنیم تا MN را در P و DC را در Q قطع کند، واضح است که $MP = DQ = 2$ ، $PN = 2\sqrt{5} - 2$ و $QC = x - 2$.



گام دوم: در مثلث BQC خط PN موازی QC است، طبق قضیه اساسی تشابه، دو مثلث BQC و BPN متشابه‌اند، نسبت ارتفاع این مثلث‌ها، همان نسبت قاعده‌های نظیر آن‌ها است، پس:

$$\frac{h_1}{h_1 + h_r} = \frac{r\sqrt{\omega} - r}{x - r} \quad (1)$$

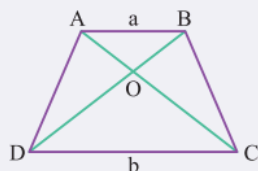
گام سوم: طبق صورت سؤال، مساحت دوزنقه $ABNM$ ، نصف دوزنقه $ABCD$ است؛ پس با استفاده از رابطه مساحت دوزنقه

$$\left(\frac{\text{ارتفاع} \times (\text{مجموع دوقاعده})}{2} \right) \text{ داریم:}$$

$$\frac{S_{ABNM}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{(2+2\sqrt{\Delta})h_1}{2}}{(x+2)(h_1+h_2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(2+2\sqrt{\Delta})h_1}{(x+2)(h_1+h_2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h_1}{h_1+h_2} = \frac{x+2}{2(2+2\sqrt{\Delta})} \quad (2)$$

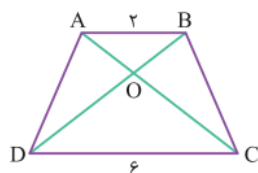
گام چهارم: سمت راست (۱) و (۲) را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{2\sqrt{5}-2}{x-2} = \frac{x+2}{2(2+2\sqrt{5})} \xrightarrow{\text{طرفين وسطين}} x^2-4=2(20-4) \Rightarrow x^2-4=32 \Rightarrow x^2=36 \Rightarrow x=\pm 6 \xrightarrow{x>0} x=6$$



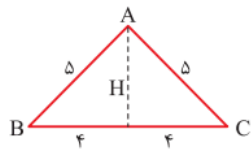
نکته اگر قطره‌های یک دوزنقه به قاعده‌های a و b را رسم کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{ABCD}} = \frac{ab}{(a+b)^2} \quad \text{و} \quad \frac{S_{\triangle OAD}}{S_{ABCD}} = \frac{ab}{(a+b)^2}$$



$$\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{ABCD}} = \frac{2(6)}{(2+6)^2} = \frac{3}{16}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



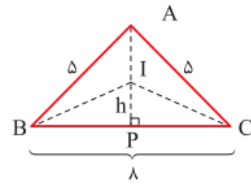
$$S = \frac{3 \times 8}{2} = 12$$

گام اول: ارتفاع مثلث داده شده را رسم می کنیم، با توجه به اعداد فیثاغورسی ۳، ۴ و ۵،

H برابر ۳ است. حال مساحت مثلث داده شده را حساب می کنیم:

نکته مرکز دایره ای که بر اضلاع یک مثلث مماس است، بر روی محل تلاقی نیمسازهای داخلی آن مثلث است.

گام دوم: محل تلاقی نیمسازهای مثلث را I می نامیم، با توجه به خاصیت نیمساز، فاصله I از هر سه ضلع مثلث برابر است. این سه فاصله را برابر h در نظر می گیریم و با توجه به مساحت مثلث ABC داریم:

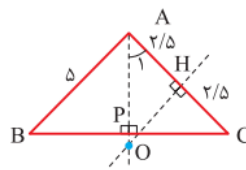


$$S_{\triangle ABC} = \frac{h \times BC}{2} + \frac{h \times AC}{2} + \frac{h \times AB}{2} \Rightarrow 12 = \frac{h(8 + 5 + 5)}{2} = 9h$$

$$\Rightarrow h = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow PI = \frac{4}{3} \quad (1)$$

نکته مرکز دایره ای که از رئوس یک مثلث می گذرد، بر روی محل تلاقی عمودمنصف های اضلاع آن مثلث است.

گام سوم: محل برخورد عمودمنصف های اضلاع مثلث را O می نامیم، دو مثلث قائم الزاویه AHO و APC دارای زاویه حاده مشترک A_1 هستند، پس متشابه اند. نسبت تشابه اضلاع نظیر را می نویسیم:



$$\frac{OH}{PC} = \frac{AO}{AC} = \frac{AH}{AP} \Rightarrow \frac{AO}{5} = \frac{2/5}{3} \Rightarrow AO = \frac{25}{6}$$

$$\Rightarrow PO = AO - AP = \frac{25}{6} - 3 \Rightarrow PO = \frac{7}{6} \quad (2)$$

$$\underbrace{OP}_{(2)} + \underbrace{PI}_{(1)} = \frac{7}{6} + \frac{4}{3} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2.5$$

گام چهارم: فاصله مرکزهای دو دایره (OI) برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه O به فاصله R هستند، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع R.

گام اول: با توجه به صورت سؤال نقاط M و N بر روی دایره‌های مقابل قرار دارند، معادله استاندارد دایره‌ها را نیز می‌نویسیم:

$$\text{دایره‌ای به مرکز } A(1, -3) \text{ و شعاع } 5 \xrightarrow{\text{معادله استاندارد}} (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25 \quad (1)$$

$$\text{دایره‌ای به مرکز } B(5, 1) \text{ و شعاع } 3 \xrightarrow{\text{معادله استاندارد}} (x-5)^2 + (y-1)^2 = 9 \quad (2)$$

گام دوم: از (1) و (2) معادله خط گذرنده از M و N که نقاط برخورد دو دایره هستند را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 25 \\ (2) \Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = 9 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 8x + 8y = 32 \Rightarrow x + y = 4$$

$$\xrightarrow{A(1, -3), B(5, 1)} y + 3 = x - 1 \Rightarrow x - y = 4$$

گام سوم: حال معادله خط گذرنده از مراکز A و B را پیدا می‌کنیم:

گام چهارم: دو معادله خط به دست آمده را با یکدیگر قطع می‌دهیم تا مختصات نقطه تلاقی یعنی H پیدا شود:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 4 \end{cases} \xrightarrow{(+)} x = 4 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} y = 0 \Rightarrow H(4, 0)$$

$$\xrightarrow{H(4, 0)}_{A(1, -3)} AH = \sqrt{(4-1)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{18}$$

گام پنجم: طول AH و BH را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{H(4, 0)}_{B(5, 1)} BH = \sqrt{(4-5)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

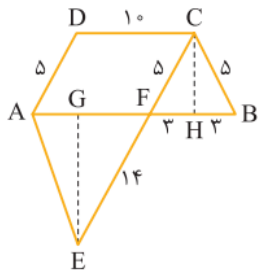
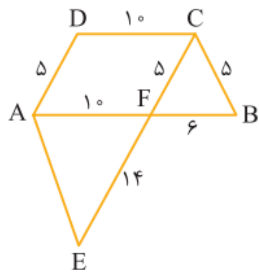
گام ششم: با توجه به شکل گام اول، نسبت مساحت دو مثلث AMN و BMN برابر است با:

$$\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{\frac{1}{2} BH \times MN}{\frac{1}{2} AH \times MN} = \frac{BH}{AH} \xrightarrow{\text{طبق گام قبل}} \frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: با توجه به اطلاعات سؤال چهارضلعی ADCF متوازی الاضلاع است، پس $AF = DC = ۱۰$ و $FC = AD = ۵$.

گام دوم: عمودهای CH و GE را رسم می‌کنیم، مثلث BCF متساوی الساقین است، با توجه به اعداد فیثاغورسی ۳، ۴، ۵، اندازه CH برابر ۴ است.



گام سوم: دو مثلث قائم الزاویه CFH و GFE متشابه‌اند ($\hat{F}$ متقابل به رأس و $CH \parallel GE$ ، EC مورب):

$$\frac{GE}{CH} = \frac{EF}{FC} \Rightarrow \frac{GE}{4} = \frac{14}{5} \Rightarrow GE = \frac{56}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{GF}{FH} = \frac{EF}{FC} \Rightarrow \frac{GF}{3} = \frac{14}{5} \Rightarrow GF = \frac{42}{5} \quad (۲)$$

$$AF = AG + \underbrace{GF}_{(۲)} \Rightarrow ۱۰ = AG + \frac{42}{5} \Rightarrow AG = \frac{8}{5} \quad (۳)$$

گام چهارم: در پاره خط AF داریم:

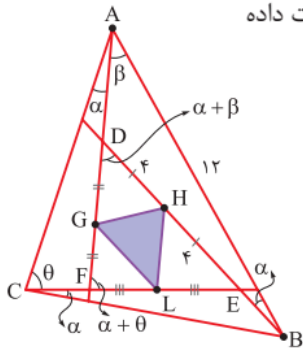
گام پنجم: در مثلث قائم الزاویه AGE رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم تا طول AE به دست آید:

$$AE^2 = AG^2 + GE^2 \xrightarrow{(۳), (۱)} AE^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{56}{5}\right)^2 = \frac{8^2(1+7^2)}{25} = \frac{64 \times 50}{25} = 128 \Rightarrow AE^2 = 128 \Rightarrow AE = \sqrt{128} \Rightarrow AE = 8\sqrt{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: زوایای گفته شده در صورت سؤال را α و زوایای FAB و FCA را به ترتیب β و θ در نظر می گیریم و اطلاعات داده شده را بر روی شکل وارد می کنیم. زاویه BDF زاویه

خارجی مثلث ADB است، پس $\hat{FDE} = \alpha + \beta$. به همین ترتیب $\hat{DFE} = \alpha + \theta$.



گام دوم: در گام اول دو زاویه از مثلث FDE با دو زاویه از مثلث ABC برابر شد (به اندازه های $\alpha + \beta$ و $\alpha + \theta$)، پس این دو مثلث متشابه اند:

$$\frac{S_{\triangle FDE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle FDE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{4}{12}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad (1)$$

رو به $\alpha + \theta$

نکته اگر پای میانه اضلاع مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث هم مساحت ایجاد می شود که مساحت هر کدام $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث اصلی است.

$$\frac{S_{\triangle GHL}}{S_{\triangle FDE}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle FDE} = 4S_{\triangle GHL} \quad (2)$$

گام سوم: نقاط G, H و L پای میانه ها در مثلث FDE هستند، پس:

$$(1) \Rightarrow \frac{S_{\triangle FDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9} \xrightarrow{(2)} \frac{4S_{\triangle GHL}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{\triangle GHL}}{\underbrace{S_{\triangle ABC}}_{\text{خواسته سؤال}}} = \frac{1}{9}$$

گام چهارم: (۲) را در (۱) جای گذاری می کنیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$AD = AB = BC = 12$$

چون تمام اضلاع لوزی با هم برابرند، پس:

از طرفی چون در مثلث ADE داریم: $FC \parallel AD$ ، پس با تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{FC}{AD} = \frac{EC}{ED} \Rightarrow \frac{FC}{12} = \frac{4}{8} \Rightarrow FC = 6$$

$$\Rightarrow BF = 12 - 6 = 6$$

حال بنا به قضیه فیثاغورس در مثلث ABF داریم:

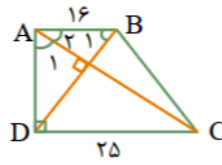
$$AB^2 = AF^2 + FB^2 \Rightarrow 144 = AF^2 + 36 \Rightarrow AF^2 = 108 \Rightarrow AF = 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} AF \times BF = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6 \Rightarrow S_{\triangle ABF} = 36\sqrt{3}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \\ \hat{B}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{به حالت دو زاویه مساوی}} \triangle ABD \sim \triangle ACD$$



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AC} \Rightarrow AD^2 = AB \times DC \Rightarrow AD = 20$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{AD \times DC}{2} = \frac{20 \times 25}{2} = 250$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)